

Concours blanc : épreuve d'informatique

11 décembre 2019

Exercice 1. **La multiplication du paysan russe.** Un des premiers algorithmes utilisés pour la multiplication de deux entiers, écrit sur des papyrus égyptiens vieux de plus de 4000 ans, est l'algorithme connu sous le nom de *multiplication du paysan russe*. Son avantage principal est qu'il ne nécessite pas de connaître le principe de l'écriture décimale d'un entier, ni même le concept de base d'écriture.

Le principe de l'algorithme pour multiplier x et y entiers est le suivant :

- on commence un tableau à 3 colonnes, x , y et p ;
- sur la première ligne on écrit x , y ;
- pour p on note y si x est impair et 0 si x est pair ;
- pour chaque ligne suivante, on dans la première colonne le quotient du nombre précédent par la division euclidienne par 2, et dans la deuxième colonne le double du nombre précédent ;
- pour la troisième colonne, on reporte le résultat de la ligne précédente si le nombre de la première colonne est pair, ou on lui ajoute le nombre de la deuxième colonne s'il est impair ;
- on s'arrête lorsque la première ligne commençant par un 0 est terminée, le résultat de la troisième colonne étant le résultat de la multiplication.

Voici un exemple de ce qui est obtenu pour la multiplication de 27 par 13 :

x	y	p
13	27	27
6	54	27
3	108	135
1	216	351
0	432	351

On trouve ainsi $13 \times 27 = 351$.

- (1) Utiliser cet algorithme pour trouver le produit de 23 par 20.
- (2) Ecrire un algorithme itératif reproduisant cet algorithme.
- (3) Combien d'itérations sont faites pour calculer le produit de x par y ?
- (4) Proposer maintenant un algorithme récuratif effectuant le même calcul. Est-il plus efficace, moins efficace ou aussi efficace ?
- (5) Justifier que les deux programmes proposés terminent.
- (6) Justifier leur correction. Il pourra être utile d'utiliser l'écriture binaire de x , ainsi que les suites x_n , y_n et p_n correspondant aux nombres successivement écrits dans chaque colonne.