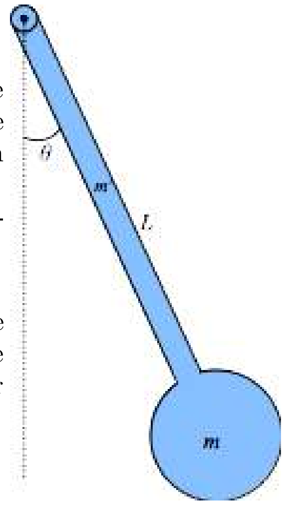
TP 17 - Pendule pesant

Aujourd'hui, vous allez faire l'étude d'un pendule pesant, qui modélise plus précisément qu'un pendule simple le balancier d'une horloge.

I Dispositif expérimental

I.1 Pendule pesant et dispositif



Le pendule dont on fait l'étude est constitué d'une tige métallique homogène de longueur $L = 1,0$ m et de masse $m' = 50$ g, à laquelle est lié un disque de masse $m = 1,0$ kg. On va négliger par la suite le rayon du disque qui est bien plus petit que la longueur de la tige.
Le dispositif expérimental permet l'acquisition d'une tension U proportionnelle à l'angle θ que forme le pendule avec la verticale.

Question (I.1.1)
Afin que la tension soit bien proportionnelle à θ, vérifier avec un voltmètre que la tension aux bornes des fils verts est bien nulle lorsque le pendule est à la verticale. Si ce n'est pas le cas, utiliser le potentiomètre gris pour annuler la tension.

I.2 Caractéristiques physiques

Indications :
— Le centre de masse du pendule pesant est situé en G tel que :

$$OG = \frac{m'L/2 + mL}{m + m'} = \frac{2m + m'}{2(m + m')}L.$$

Question (I.2.1)
Lorsque $m \gg m'$, comment se simplifie cette expression ? Où est alors situé le centre de masse ?

Indications :
— Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation est donné par la formule :

$$J = \frac{1}{3}m'L^2 + mL^2.$$

Question (I.2.2)
Lorsque $m \gg m'$, comment se simplifie cette expression ?

Question (I.2.3)
Justifier qu'avec les masses utilisées, on peut approximer ce pendule pesant par un pendule simple.

II Etude expérimentale

Objectifs :
— Déterminer la période expérimentale du pendule pesant.
— Déterminer le moment d'inertie grâce au portrait de phase.

II.1 Acquisition

Question (II.1.1)
Lancer le pendule avec un angle de départ $\theta_0 \simeq 20°$ et sans vitesse initiale et estimer très grossièrement sa période (ordre de grandeur).

Question (II.1.2)
Vérifier que le pendule est relié à la carte d'acquisition selon les instructions de la fiche.

Question (II.1.3)
Lancer *Mesures électriques*. Activer les entrées EA1 et EA5. Cocher la case mode différentielle en dessous de EA1. Préparer l'acquisition d'environ 10 périodes. On choisira 500 points et on réglera le temps total avec l'observation grossière précédente.

Question (II.1.4)
Lancer le pendule avec un angle de départ $\theta_0 \simeq 20°$ et sans vitesse initiale puis lancer l'acquisition. Si nécessaire ajuster le 0 et recommencer l'acquisition.

Question (II.1.5)
Exporter les données dans *Regressi* puis lisser votre acquisition (nouvelle variable thetali lissage d'ordre 3)

II.2 Analyse

Indications :
- Pour le pendule pesant lâché sans vitesse initiale depuis l'angle θ_0, l'équation horaire du mouvement s'écrit :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) \qquad \text{avec} \qquad \omega = \sqrt{(\frac{m+m')gOG}{J}}.$$

Question (II.2.1)
En utilisant la fonction modélisation de Regressi, estimer ω et en déduire J. Comparer au calcul de la première partie, on ne cherchera pas à estimer les incertitudes.
Remarque : ce n'est pas du tout la méthode la plus précise ni la plus évidente pour estimer J.

III Energies

Objectifs :
- Observer les énergies cinétique et potentielle au cours du temps.
- Mettre en évidence la non conservation de l'énergie mécanique.

III.1 Rappels sur les énergies

Indications :
- Pour un solide en rotation autour d'un axe, l'énergie cinétique s'écrit $E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$.
- L'énergie potentielle du pendule pesant s'écrit, en incluant l'approximation des petits angles :

$$E_p = (m+m')g(z(G)) = (m+m')gOG(1-\cos\theta) \simeq (m+m')gOG\frac{\theta^2}{2}.$$

III.2 Tracé des courbes

Pour cette partie, on ôtera la masse m du pendule.

Question (III.2.1)
Montrer que le nouveau moment d'inertie est $J = \frac{1}{3}m'L^2$.

Question (III.2.2)
Afficher ensuite les courbes de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle (avec l'approximation des petits angles) au cours du temps sur le même graphique, zoomer sur quelques périodes, les imprimer et commenter.

Question (III.2.3)

Afficher la courbe de l'énergie mécanique au cours du temps et dessiner son allure sur le compte rendu. Commenter.

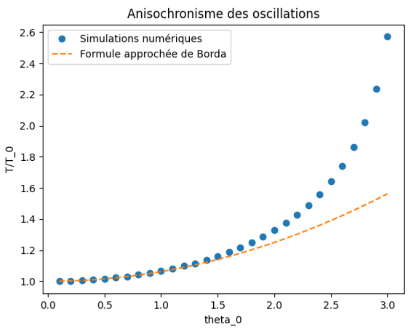
On précisera dans le compte rendu les formules utilisées pour calculer les nouvelles variables on joindra toutes les impressions de courbes utiles. On commentera bien l'allure des courbes. Pour l'énergie mécanique notamment, on fera une remarque sur l'aspect général et la tendance de la courbe.

On essaiera de présenter de manière rédigée et organisée la réflexion et le travail effectué.

IV Ecart à l'isochronisme

IV.1 Observation rapide

On remettra ici la masse au bout de la tige. On rappelle que pour un pendule pesant comme pour un pendule simple, la période dépend de θ_0 l'amplitude d'oscillation. On note T_0 la période obtenue avec l'approximation des petits angles qui est, elle, indépendante de θ_0. Cette dépendance ne devient importante qu'aux angles θ_0 élevés (pour quantifier « importante » et « élevés » voir le graphique ci-contre).



Ces courbes ont été obtenues de deux manières différentes. La courbe correspondant à la formule approchée de Broca où l'on fait le développement limité de T en fonction de θ_0, donc où l'on suppose que l'on peut améliorer la précision en ajustant un polynôme (ici de degré 2) et en résolvant les équations différentielles obtenues lors du développement limité de $\cos \omega(\theta_0)t$. La courbe "simulations numériques" est obtenue avec le module de résolutions d'équations différentielles de python `scipy.integrate` décrit ci-dessous. Toutefois, ce module ne peut résoudre que des équations du premier ordre, nous lui demandons donc à la ligne 14 de travailler avec le vecteur $(\theta, \dot{\theta})$ dont la dérivée est $(\dot{\theta}, \ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta)$.

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as pypl
3  import scipy.optimize as resol
4  import scipy.integrate as integr
5
6  debut = 0.
7  fin = 2.
8  pas = 0.001
9  T = np.arange(debut,fin,pas) #tableau de définition du temps
10
11 omega_carre = 4*(np.pi**2) #définition de la pulsation propre au carré
12
13 def dot(theta,t):
14   return theta [1], - omega_carre*np.sin(theta[0])
15   #définition de l'équation différentielle du premier ordre
16
17 def theta(theta_0) :
18     V = integr.odeint(dot,[theta_0,0.],T) #résolution de l'équation différentielle
19     return V[: , 0]
20
21 def periode(theta_0) :
22     l = theta(theta_0)
23     changement = 0
24     t = [0,0]
```

```
25     for i in range(1,len(l)) :
26         if l[i]*l[i-1] < 0 :
27             t[changement] = i
28             changement = changement + 1
29         if changement == 2 : break
30     return pas*(t[1]-t[0])*2
31
32 theta_ini = np.arange(0.1,3.1,0.1)
33 per_simu = []
34 for i in theta_ini : per_simu.append(periode(i))
35 borda = 1 + theta_ini**2/16
36
37 pypl.plot(theta_ini,per_simu,'o',label ='Simulations numériques')
38 pypl.plot(theta_ini,borda,'--',label ='Formule approchée de Borda')
39 pypl.xlabel('theta_0')
40 pypl.ylabel('T/T_0')
41 pypl.title('Anisochronisme des oscillations du pendule simple')
42 pypl.legend()
43 pypl.show()
```

Question (IV.1.1)
Mesurer la période obtenue pour $\theta_0 \simeq 10°$ en comptant un maximum de périodes. Pourquoi peut-on considérer que cette période est T_0 ?

Question (IV.1.2)
Réaliser une mesure de T pour $\theta_0 \simeq 45°$ et calculer l'écart relatif avec T_0 : $\delta T = \frac{T-T_0}{T_0}$. Comparer à la valeur donnée par le programme `pendule_pesant.py` (disponible dans le fichier Ressources) ou prédite par la formule de Broca.

IV.2 Programme numérique

Question (IV.2.1)
La fonction annexe `theta` a pour but de donner la liste des valeurs obtenues pour $\theta(t)$. Expliquer alors le fonctionnement de la fonction `periode`, en particulier le rôle des lignes 26 et 30 et de la variable changement.

Question (IV.2.2)
Si on a le temps : A partir de quelle valeur (en degré) de l'angle initial est-il possible de faire une différence significative entre les simulations numériques et la formule approchée de Broca ? Faire une mesure de δT correspondant à cette valeur pour déterminer quelle méthode donne les résultats les plus conformes à l'expérience.

IV.3 Incertitudes

Question (IV.3.1)
A l'aide de la fiche fournie, estimer les incertitudes liées à la mesure de T et T_0. En déduire l'incertitude sur δT.

Question (IV.3.2)
Si on a le temps : Tracer la courbe expérimentale d'écart à l'isochronisme et la modéliser par un polynôme d'ordre 2. Comparer à la courbe théorique (formule approchée de Borda) $T(\theta) = T_0\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$.