TP 16 - Frottements fluides

Aujourd'hui, vous allez travailler sur les forces de frottement causées par un fluide. On va donc dans deux cadres différents essayer de modéliser ces frottements, et confronter ces modèles à l'expérience afin de justifier ou non leur pertinence. **Il faudrait donc particulièrement penser à discuter et critiquer les résultats obtenus.**

I Trajectoire d'un volant de badminton

Objectifs :
- Résoudre numériquement une équation différentielle avec Python.
- Déterminer le modèle de frottements le plus adapté à une expérience.

I.1 Expérience

On enregistre le mouvement d'un volant de badminton lors d'un coup, et on va voir qu'il est nécessaire de prendre en compte les frottements causés par l'air.

Indications :
- Les frottements fluides sont complexes à modéliser, mais il existe deux cas limites assez simples, que l'on peut choisir en fonction du nombre de Reynolds $Re = \frac{Lv\rho}{\eta}$ où L est un ordre de grandeur de la taille de l'objet considéré, v un ordre de grandeur de sa vitesse par rapport au fluide et ρ la masse volumique du fluide.
- Lorsque $Re < 1$, on est dans le cadre d'un écoulement laminaire (vitesse faible et viscosité élevée) et la force de frottement s'écrit $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$.
- Lorsque $Re > 10^3$, l'écoulement est turbulent et la force de frottement s'écrit $\vec{F} = -\beta v\vec{v}$.

1. Pour chacun des deux modèles, appliquer le PFD pour déterminer l'équation différentielle suivie par la vitesse.
2. Exprimer la vitesse limite atteinte en régime permanent v_{lim}. On a mesuré expériementalement cette vitesse pour ce volant $v_{lim} = 6,2$ m/s.
3. Montrer alors qu'il faut résoudre les deux équations différentielles :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{g}{v_{lim}}\vec{v} \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{gv}{v_{lim}^2}\vec{v}$$

I.2 Exploitation de la vidéo

La vidéo est filmée à 30 images/seconde.

4. Ouvrir le fichier `badminton.avi` avec l'outil d'exploitation vidéo de *Latis-pro* (la version disponible dans le dossier *Ressources/Ressources physique/Logiciels*).
5. On va d'abord se placer au moment où le volant vient de quitter la raquette. Choisir l'origine au centre du volant et choisir les axes, l'échelle et prendre l'origine du repère sur le volant.
6. Réaliser maintenant le pointage du volant jusqu'à ce qu'il touche le sol.
7. Exporter les données dans un fichier .csv (*comma separated values*) à sauvegarder qui sera ensuite traité en Python.

I.3 Traitement des données

En Python, il est possible d'exploiter les données d'un fichier nommé `variables.csv` (qui doit être dans le même dossier que le programme Python) pour en faire des listes. La syntaxe pour extraire les valeurs des variables deux premières colonnes est la suivante :

```python
import csv
import scipy.integrate as integr
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as pypl

with open('variables.csv', newline='') as fichier:
    lecture = csv.reader(fichier, delimiter=';')
    var1 = []
    var2 = []
    for ligne in lecture :
        var1.append(float(ligne[0]))
        var2.append(float(ligne[1]))
```

8. Ouvrir le fichier .csv que vous avez créé avec un éditeur de texte (Bloc-notes) afin de vérifier les colonnes qui vous intéressent (attention, Python commence à compter par 0...). Supprimer la première ligne qui ne contient pas de valeurs mais le nom des variables, et remplacer (ctrl-H) toutes les virgules par des points avant de sauver le fichier et de fermer Bloc-notes.
9. Sous spyder, écrire le programme en Python qui permet d'obtenir deux listes `X` et `Y` donnant les positions horizontales et verticales du volant de badminton.
10. Visualisez l'évolution temporelle des positions horizontale et verticale mesurées, et les comparer aux résultats attendus en l'absence de frottement, en utilisant les commandes suivantes :

```python
T=[k/30 for k in range(len(X))]
pypl.plot(T,X,'bo',label='x(t)')
pypl.plot(T,Y,'ro',label='y(t)')
pypl.xlabel('t(s)')
pypl.legend()
pypl.show()
```

11. Visualiser ensuite la trajectoire obtenue. Est-elle parabolique ? Que doit-on en conclure ?

    On va maintenant essayer de résoudre les deux équations différentielles précédentes avec Python, il nous faut donc déterminer les conditions initiales (ici les composantes du vecteur-vitesse initial).

    On pourrait essayer d'exploiter les premières valeurs des listes `X` et `Y` pour effectuer une régression linéaire (les pentes des droites étant alors les vitesses initiales sur chaque axe) avec la liste `T`.

    Pour obtenir la pente d'une régression linéaire sur les n premières valeurs de deux listes `X` et `T` on utilise la syntaxe suivante :

```python
vx0_mes = np.polyfit(T[:n],X[:n],1)[0]
```

12. Déterminer ainsi les valeurs mesurées des vitesses initiales selon x et y à partir des 3 premières mesures.

    Toutefois, avec une capture à 30 images par seconde, les effets des frottements sont déjà perceptibles au bout de $0,1$ s, et ces vitesses sont sous-estimées. Il aurait fallu effectuer la capture avec une caméra plus rapide (par exemple 300 images par seconde), mais il y aurait alors un travail de pointage beaucoup plus long.

    On prendra donc ici pour les vitesses initiales $v_{x0} = 8,25$ m/s et $v_{y0} = 12,9$ m/s.

    Pour résoudre une équation différentielle vectorielle d'ordre 1 en Python, on peut utiliser la fonction `odeint` du module `scipy.integrate` selon la syntaxe `integr.odeint(equation_diff,CI,temps)` où `equadiff` est la fonction permettant de calculer la dérivée de la fonction vectorielle, `CI` sont les conditions initiales et `temps` la liste des instants où on souhaite avoir la valeur du vecteur obtenu par résolution de l'équation différentielle.

    Par exemple, pour la résolution de l'équation différentielle avec les frottements linéaires entre l'instant $t = 0$ et $t = 2$ s avec un pas de temps de 1 ms on écrit :

```python
g = 9.8
v_lim = 6.2
a = g/v_lim
vx0 = 8.25
vy0 = 12.9

```

```
def acc_lin(v,t) :
    return -a*v[0], -g -a*v[1]

temps = np.arange(0,2,0.001)
V_lin = integr.odeint(acc_lin,[vx0,vy0],temps)
vx_lin = V_lin[: , 0]
vy_lin = V_lin[: , 1]
```

puisque le système d'équation différentielle à résoudre est :

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= -\frac{g}{v_{lim}}v_x \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g - \frac{g}{v_{lim}}v_y\end{aligned}$$

La liste `V_lin` contient alors les 2000 valeurs du vecteur vitesse, et `vx_lin` et `vy_lin` les projections horizontale et verticale.

13. Copier et modifier ces lignes afin d'obtenir `V_q`, `vx_q` et `vy_q` dans le cas de frottements quadratiques où l'équation différentielle s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= -\frac{g\sqrt{v_x^2+v_y^2}}{v_{lim}^2}v_x \\ \frac{dv_y}{dt} &= -g - \frac{g\sqrt{v_x^2+v_y^2}}{v_{lim}^2}v_y\end{aligned}$$

Une fois les vitesses obtenues, il est possible d'obtenir les positions en intégrant successivement puisqu'entre deux instants très proches $x(t_2) \simeq x(t_1) + (t_2 - t_1)v_x(t_1)$:

```
x_l= [0]
for vx in vx_lin :
    x = x_l[-1]
    x_l.append(x+0.001*vx)
```

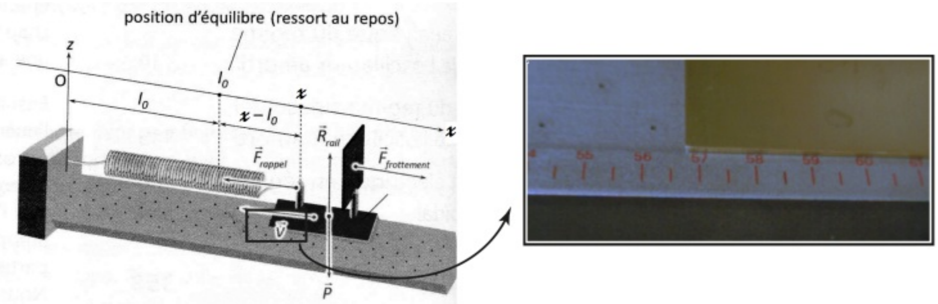
14. Copier et modifier ces lignes afin d'obtenir `y_l`, `x_q` et `y_q` les positions horizontales et verticales calculées par la résolution numérique pour chaque modèle.
15. Commenter alors les résultats obtenus en visualisant et imprimant les courbes de la trajectoire réelle et celles des deux modèles superposées.
16. Estimer le nombre de Reynolds dans cette expérience (sachant que pour l'air $\rho \sim 1$ kg.m^3 et $\eta \sim 10^{-5}$ Pa.s) et commenter.

II Oscillateur soumis à des frottements fluides dans l'air

Objectifs :
- Réaliser une mesure de coefficient de frottement.
- Critiquer un modèle.

II.1 Expérience

On dispose d'un mobile de masse $m = 63,5$ g relié à deux ressorts identiques de raideur $k = 5,0$ N/m, l'ensemble des deux ressorts est donc équivalent à seul ressort de constante de raideur $2k$. Le mobile est posé sur un banc gradué qui souffle de l'air afin de rendre les frottements solides entre le mobile et le banc négligeables. Une ailette rectangulaire (de dimension 13 cm par 14 cm) est fixée au mobile perpendiculairement au déplacement : cette prise d'air impose à la masse une force de frottements fluides que l'on souhaite caractériser. L'ensemble est schématisé sur l'illustration ci-dessous. On écarte le mobile de sa position initiale et on le lâche sans vitesse initiale : on filme alors son déplacement au cours du temps.



1. Ouvrir la vidéo `Oscillateur_amorti.avi` et visionner la vidéo.
2. Estimer un ordre de grandeur de la vitesse à partir de la vidéo en expliquant la démarche.
3. On donne pour l'air $\rho_{air} \simeq 1$ kg.m^{-3} et $\eta_{air} \simeq 1.10^{-5}$ Pa.s. Calculer le nombre de Reynolds et dire quel modèle retenir pour la force.

> **Indications** :
> — On va pour les besoins de cette modélisation retenir que $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$.
> — Dans ce cadre, la solution théorique s'écrit $x(t) \simeq x_{lim} + x_0 e^{\frac{-\omega_0 t}{2Q}} \cos(\omega_0 t + \phi)$ avec $Q = \frac{\sqrt{2km}}{\alpha}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

4. Tracer l'allure de $x(t)$ en y faisant figurer x_{lim}.

II.2 Utilisation de la modélisation

Pour gagner du temps, le pointage vidéo a déjà été effectué.

1. Ouvrir le fichier `pointage_oscillateur.txt` avec le bloc note. Sélectionner tout et copier. Ouvrir ensuite *Regressi* et faire *Nouveau/Presse papier*. Renommer var_1 en t et $var2$ en x.
2. Modéliser la courbe par un modèle adapté en excluant les premiers points (une demi-pseudo période). Commenter le modèle obtenu par rapport à vos données et à la valeur du nombre de Reynolds calculée plus haut. Critiquer le résultat.

   Si la modélisation n'arrive pas à converger ou donne un résultat aberrant on donnera une estimation des paramètres ω_0 et λ afin qu'elle converge. A vous de trouver une estimation de ω_0 et pour λ on pourra choisir $\lambda \simeq 0,01$. Si vous avez choisi un modèle « période », attention car à cause d'un bug ce qui est noté T n'est pas la période mais la pseudo-pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Là encore vous devrez l'estimer afin que la modélisation converge.
3. Proposer une estimation de α à partir des résultats de modélisation.

> **Indications** :
> — On rappelle la définition du décrément logarithmique $\delta = \ln\left(\frac{x(t)-x_{lim}}{x(t+T)-x_{lim}}\right) \simeq \frac{\pi}{Q}$.

4. A l'aide d'une mesure de décrément logarithmique, estimer Q puis α.