TP 1 - Incertitudes sur la mesure d'une constante de raideur d'un ressort

Les ressorts sont des objets que l'on rencontre quotidiennement, que ce soit dans un stylo-bille, des amortisseurs de voiture ou même de manière beaucoup plus précise dans des appareils de mesure comme les sismographes.
Si l'on considère le cas des amortisseurs que l'on va étudier un peu plus en détail pendant l'année, le but du ressort dans l'amortisseur est de convertir l'énergie cinétique en énergie de déformation (énergie élastique) : il absorbe les déformations de la route.
Pour caractériser un ressort, deux grandeurs sont nécessaires : sa longueur à vide l_0 (la longueur du ressort soumis à aucune force d'étirement ou de contraction, c'est donc une grandeur qui s'exprime en m) et sa constante de raideur k qui caractérise la facilité que l'on a à étirer ou contracter ce ressort et qui s'exprime en N.m^{-1}.

Dans ce TP, vous allez devoir déterminer les caractéristique d'un ressort donné. La longueur à vide se mesure simplement avec une règle, donc vous allez vous concentrer sur différentes manières de mesurer la constante de raideur, et en particulier étudier comment chaque mesure est affectée d'une incertitude.

I But du TP et protocole expérimental

I.1 Mise en situation

On veut étudier une suspension de voiture, il s'agit en première approximation d'un assemblage de ressorts dont la constante de raideur globale doit avoir une valeur optimale pour le confort des usagers et pour assurer le fonctionnement correct de la voiture. Cette valeur optimale doit être de $k_{opt} = 9,5 \pm 0,5$ N.m^{-1}. Votre but est donc de mesurer la constante de raideur d'un système de ressort afin de vérifier qu'il est toujours apte à la circulation.

I.2 Dispositif étudié

On doit donc étudier le système suivant, composé d'une masse mobile m reliée à deux ressorts de constante de raideur globale k que l'on veut mesurer. La masse repose sur un banc gradué qui souffle continuellement de l'air afin que l'on puisse négliger les frottements.

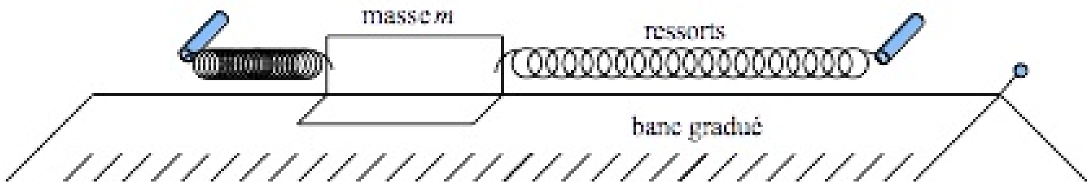

Figure 1 – Dispositif expérimental étudié.

II Mesure statique

Objectfis :
- Mesurer rapidement et simplement la constante de raideur d'un ressort ;
- Déterminer l'incertitude associée à cette mesure.

II.1 Mesure

Comme on l'a vu, la constante de raideur caractérise la facilité avec laquelle on peut déformer le ressort. On va donc le déformer de manière quantifiée en attachant une masse m' qui pend dans le vide via une poulie et regarder la déformation engendrée (cf. Fig. 2).

Question (II.1.1)
Mesurez la masse du mobile.

Question (II.1.2)
En l'absence de la masse m', repérez la position l_1 du mobile sur le banc gradué.

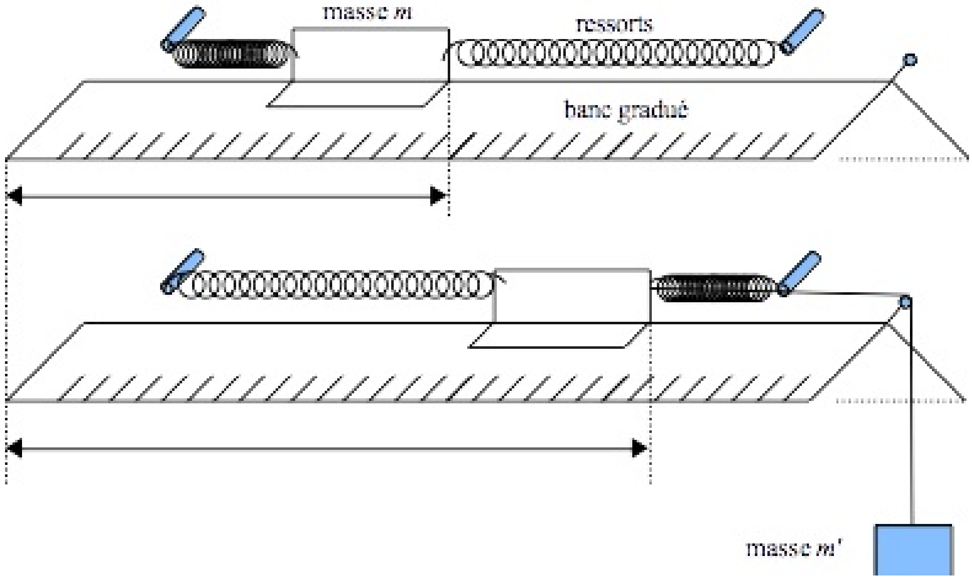

Figure 2 – Dispositif expérimental étudié.

Question (II.1.3)
Suspendez la masse $m' = 50{,}0$ g au fil qui passe par la poulie pour tirer le mobile, et relevez sa nouvelle position.

Question (II.1.4)
Déduisez en l'allongement $x = l_2 - l_1$

Question (II.1.5)
On peut montrer qu'il y a proportionnalité entre l'allongement x et la masse m', et plus particulièrement que cette relation est $kx = m'g$ où $g = 9{,}81$ U.S.I. est l'accélération de la pesanteur. Vérifiez l'homogénéité de cette formule.

Question (II.1.6)
Donnez la valeur de k que vous venez de mesurer en supposant m' sans incertitude dans un premier temps.

II.2 Incertitude associée

On va dans cette partie estimer l'incertitude associée à cette mesure de la constante de raideur.

Rappels :
- Pour estimer l'incertitude associée à une mesure unique (incertitude de type B) effectuée avec un instrument gradué de graduation Δ, l'incertitude-type est $u(x) = \Delta/\sqrt{12}$;
- pour propager les incertitudes de deux mesures $u(a)$ et $u(b)$ à une grandeur c qui dépend de a et b :
  - si $c = a + b$ ou $c = a - b$ on utilise la formule $u(c) = \sqrt{u(a)^2 + u(b)^2}$;
  - si $c = a \times b$ ou $c = a/b$, on utilise la formule $\frac{u(c)}{c} = \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$.

Question (II.2.1)
Donnez les incertitudes associées aux mesures de l_1 et l_2. Présentez ces deux résultats convenablement.

Question (II.2.2)
Présentez votre résultat de la mesure de x (donc avec l'incertitude associée).

Question (II.2.3)
Donnez enfin votre résultat de la mesure de k, avec l'incertitude-type, puis avec l'incertitude élargie $U(k) = 2u(k)$. (On considèrera que les valeurs de m' et g sont connues avec suffisamment de précision pour ne pas influer sur ce résultat). Comparer votre résultat de mesure et celui demandé par le cahier des charges en calculant un z-score.

III Mesure dynamique

Comme nous l'avons vu en TD, il est aussi possible d'utiliser les oscillations d'un système masse-ressort autour de sa position d'équilibre afin de déterminer sa constante de raideur. En l'absence de frottements (d'où l'intérêt de la soufflerie), le mouvement est périodique et la période des oscillations de ce système est donnée par la formule $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Objectifs :
- Effectuer une mesure de période pour déduire une constante de raideur ;
- Estimer l'incertitude associée à cette mesure, trouver les sources d'erreur et minimiser leurs effets.

III.1 Mesure de la période

Pour mesurer une période, on va utiliser un chronomètre.

Question (III.1.1)
Allumez la soufflerie, écartez le mobile de sa position d'équilibre et mesurez la période d'une oscillation T. Que remarque t'on ?

Question (III.1.2)
Pour améliorer la précision de la mesure, mesurez 10 périodes. Inscrivez votre résultat au tableau.

On pourrait ici aussi estimer les incertitudes avec une incertitude de type B, cependant, la plus grande source d'erreur n'est pas due à l'instrument mais à la difficulté pour l'expérimentateur de lancer et arrêter le chronomètre au bon instant. On va donc préférer estimer cette incertitude par une incertitude de type A (qui est préférable dans tous les cas, mais parfois difficile à mettre en œuvre ou prenant trop de temps).

Rappels : Pour faire un traitement statistique des incertitudes il est nécessaire de procéder à N mesures. On calcule ensuite la moyenne m et l'écart-type moyen σ à l'aide de *Regressi*, un tableur, une calculatrice, ...
- La meilleure estimation de la valeur vraie est la moyenne m.
- L'incertitude associée est estimée par $\sigma/\sqrt{N}$ (plus on fait de mesures, plus on s'assure que la moyenne se rapproche de la valeur vraie).
- Afin d'éviter une trop grande perte de temps avec les mesures, vous utiliserez le résultat de mesure de chaque élève inscrit au tableau.

Question (III.1.3)
Ouvrez le dossier `Ressources/Ressources CPGE/Dossier commun/Physique` et installez l'application *Regressi*. Complétez un fichier (Fichier > Nouveau > Clavier) en utilisant les résultats consignés par chacun au tableau, puis cliquez sur la case **statistique**. Dans les options, choisir l'option **Courbes de Gauss**, visualisez le résultat et cliquez sur le **tableau** pour obtenir les variables statistiques. La courbe de Gauss est ce vers quoi tendrait la répartition des mesures si on en faisait une infinité.

Question (III.1.4)
Présentez votre résultat de mesure de la valeur de 10 T à l'aide du chronomètre (on prendra ici aussi l'incertitude élargie $U(10T) = 2u(10T)$).

Question (III.1.5)
Déduisez en la valeur de T. Quel est l'intérêt d'avoir fait la mesure sur 10 périodes au lieu d'une seule ?

III.2 Méthode Monte-Carlo

Objectifs :
- Utiliser une simulation numérique de tirages aléatoires afin de propager l'incertitude associée.

On a procédé à l'évaluation des incertitudes pour les deux grandeurs m et T, et le lien entre k, m et T est $k = 4\pi^2 m T^{-2}$. On n'est donc plus dans le cas d'un simple produit type $c = a \times b$ puisque la dépendance en T est à une puissance de 2 (dépendance quadratique).

On procède donc à une évaluation des incertitudes selon la méthode de Monte-Carlo avec le programme donné ci-dessous et disponible dans le dossier Ressources CPGE :

1. on simule un nombre N (grand) de valeurs aléatoires de T et m en suivant une loi gaussienne centrée sur leur moyenne et d'écart type égal à l'incertitude. On utilise alors Python avec le module `numpy.random` et sa fonction `normal` (pour une valeur simulée d'une grandeur) ;
2. pour chaque couple de valeurs simulées m et T, on calcule la valeur de k correspondante ;
3. on calcule la meilleure estimation de k comme la valeur moyenne et et son incertitude comme l'écart-type des N valeurs calculées.

```
1  # Importation des bibliothèques
2  import numpy as np
3  import numpy.random as rd
4  import matplotlib.pyplot as plt
5  # Entrée des données du problème
6  m = #kg
7  T = #s
8  u_m = # en kg à compléter
9  u_T = # en s à compléter
10 # Simulation de N = 10000 Titrages par la méthode Monte-Carlo
11 N = 10000 # nombre de tirages à réaliser
12 m_sim = rd.normal(m,u_m, N) # simulation de N valeurs de masses autour de m avec ecart type u_m
13 T_sim = # simulation des valeurs de T à compléter
14 # Expression de k
15 k_sim = # à compléter avec la formule du calcul de k
16 ## Analyse statistique des résultats de la simulation MC
17 k_moy = np.average(ksim) # Calcul de la valeur moyenne de k
18 u_k= np.std(k_sim,ddof=1) # Ecart-type de k
19 print (k_moy,u_k)
```

Question (III.2.1)
Déterminer quelles lignes du programme correspondent à chaque étape de la méthode décrite.

Question (III.2.2)
Compléter les lignes nécessaires.

Question (III.2.3)
Ecrire le résultat obtenu pour k avec cette méthode et commenter en comparant entre eux les 2 résultats expérimentaux pour k en calculant un z-score.