1 RLC parallèle

On considère un circuit RLC parallèle alimenté par une source de courant idéale délivrant un courant $i(t) = i_m \cos(\omega t)$.

Question (1. 1)
Faire un schéma.

Question (1. 2)
Montrer que la tension aux bornes du circuit est donnée par $u(t) = \Re(\underline{u}e^{j\omega t})$ où :

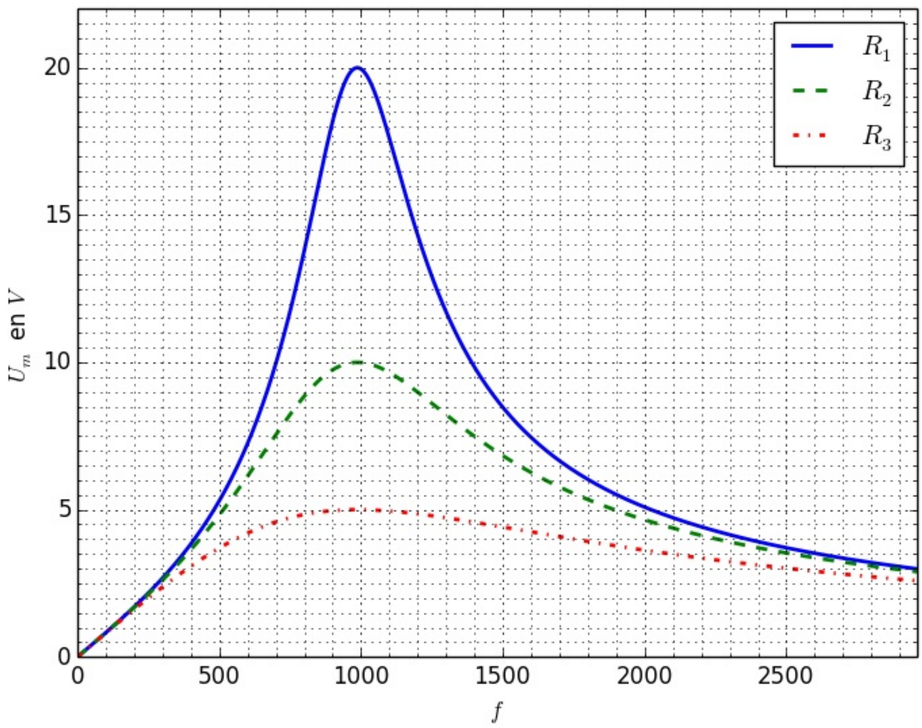
$$\underline{u} = R\frac{i_m}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

en exprimant ω_0 et Q en fonction des données du problème.

Question (1. 3)
Montrer qu'il y a résonance. Identifier sur les courbes ci-dessous laquelle correspond à la valeur de Q la plus élevée.

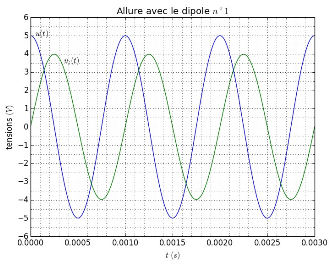
Question (1. 4)
Exprimer la bande-passante en pulsation en fonction de ω_0 et Q, puis en fonction de R, L et C.

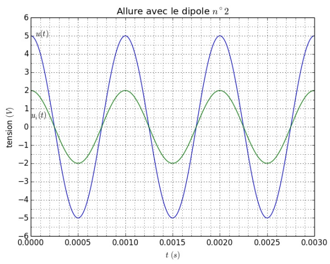
Question (1. 5)
On trace la valeur de $|\underline{u}|$ en fonction de la fréquence f de la source de courant pour 3 valeurs différentes de R, en gardant L, C et $i_m = 10$ mA constants. Déterminer les valeurs de $R1$, R_2, R_3, L et C.

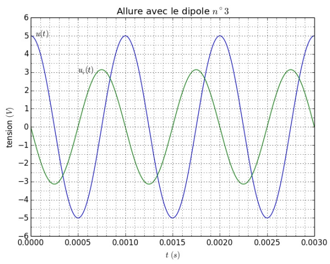


2 Utilisation simple des impédances complexes

On réalise un circuit très simple en branchant un dipôle sur une source de tension sinusoïdale, et on mesure à l'oscilloscope la tension à ses bornes $u(t)$ ainsi qu'une tension $u_i(t)$ proportionnelle au courant qui traverse le dipôle $i(t)$. On ne détaille pas comment cette mesure est faite mais la relation est donnée par $u_i(t) = 10R_{mes}i(t)$ avec $R_{mes} = 20\Omega$. On effectue trois fois cette expérience en prenant comme dipôle une résistance, un condensateur et une bobine. Vous trouverez ci-dessous les trois oscillogrammes obtenus (il n'y a pas de lien entre la numérotation des diagrammes et l'ordre des dipôles), attribuez à chaque oscillogramme le dipôle correspondant, et déterminez la valeur de R, L et C.

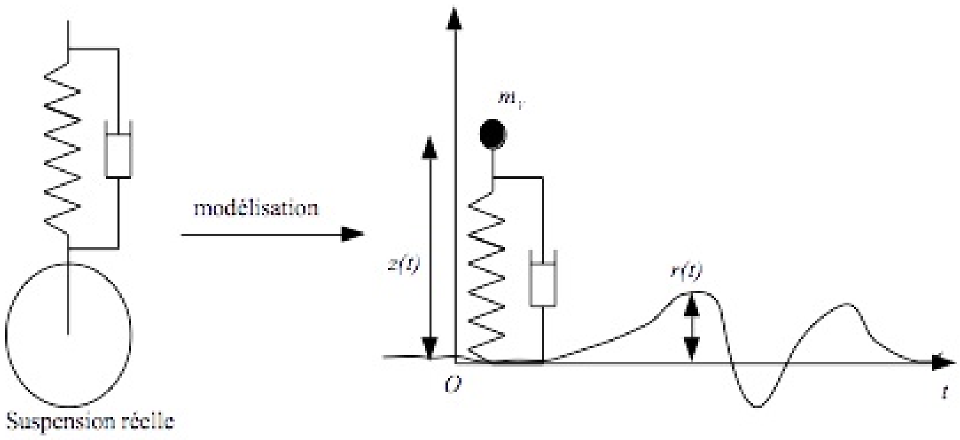






3 Suspension de voiture

Une suspension de voiture est constituée d'un ressort dont les deux extrémités sont reliées à un amortisseur. Le haut du ressort est accroché au bâti de la voiture et l'extrémité inférieure est reliée à la roue. On considérera que tout se passe comme si on avait une masse $m_V = 1,0.10^3$ kg sur l'extrémité haute du ressort et l'extrémité basse qui suit la route (voiture à une roue...). La constante de raideur du ressort est $k = 1,0.10^6$ N/m et sa longueur à vide est l_0. L'effet de l'amortisseur est d'exercer une force de frottement fluide de coefficient α dont on admettra l'expression : $F = -\alpha\frac{d(z-r)}{dt}$ sur l'axe Oz (par circulation d'un piston entouré d'huile dans un cylindre). La route a un profil $r(t)$ défini par rapport à O origine du repère, fixe dans le référentiel terrestre. On notera $z(t)$ la hauteur de la voiture **par rapport à O (Pas par rapport à la route)**. La voiture roule préalablement sur du plat, puis entre à partir de $t = 0$ sur une route caillouteuse ce que l'on modélisera par $r(t > 0) = 0$ et $r(t > 0) = h\cos\omega t$. On négligera le régime transitoire.



Question (3. 1)

On étudie dans un premier temps le régime $t < 0$. En considérant que la voiture est au repos verticalement, déterminer l_{eq} la longueur du ressort sur une route plane en fonction de l_0, m_V, g et k. Vérifier que ce résultat est conforme par rapport à la valeur l_0. Que vaut $z(t < 0)$?

Question (3. 2)

On note maintenant $x(t) = z(t) - l_{eq}$. Montrer que l'équation différentielle suivie par x pour $t > 0$

peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 h\cos(\omega t) - \frac{\omega\omega_0 h}{Q}\sin(\omega t)$$

en précisant les valeurs de ω_0 et Q.

Question (3. 3)

On s'intéresse à la solution en régime forcé de cette équation, donc on cherche une solution de la forme $x(t) = x_0\cos(\omega t + \phi)$. Quel est l'outil mathématique le plus adapté à la résolution d'un tel problème ? Préciser les notations utilisées, et donner l'expression des deux termes du second membre de l'équation différentielle avec cet outil.

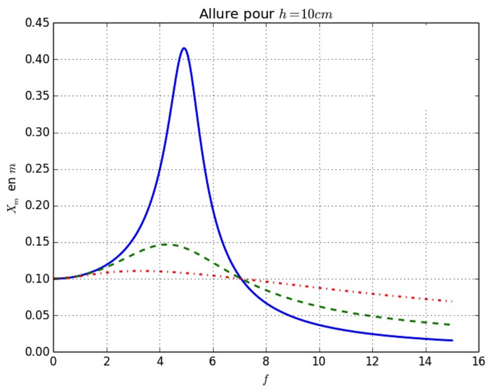
Question (3. 4)

Montrer alors que l'on peut écrire :

$$x_0 = \frac{h\sqrt{1+\frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q}}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2}}}.$$

Question (3. 5)

On propose 3 allures pour $x_0(f = \frac{\omega}{(2\pi)})$. Trouver quelle allure correspond à $Q \gg 1$, $Q = 1$ et $Q \ll 1$ en justifiant. Quelle courbe correspond à une suspension que l'on qualifie habituellement de "molle" ? et "dure" ? Comment régler la suspension en pratique ?



Question (3. 6)

Parmi ces trois courbes, laquelle a la réponse la plus confortable sur tout type de route ?

Question (3. 7)

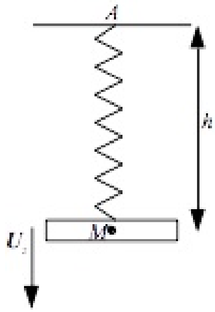
On s'intéresse maintenant au modèle de route utilisé. On considère qu'il y a sur la route un caillou tous les Δl. Comment doit-on choisir ω en fonction de Δl et de la vitesse de la voiture v pour pouvoir modéliser cette route par un profil sinusoïdal de pulsation ω ?

Question (3. 8)

La suspension de la voiture est mal réglée et est trop molle, et on aborde une route avec un caillou tous les 2,5 m. Quelle est la vitesse (en km/h) à laquelle il ne faut surtout pas rouler ? Quelles sont les deux solutions pour ne pas être trop secoué ? Laquelle est la plus efficace ? Laquelle choisit-on en pratique ?

4 Piscine à vague

Pour créer des vagues dans une piscine, on fait effectuer des oscillations verticales à un gros corps de masse m immergé. Ce corps de masse volumique ρ et de volume V est plongé dans l'eau de masse volumique ρ_{eau} et suspendu à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, accroché en un point A (voir figure qui est donnée à l'équilibre). (Comme on ne l'a pas encore étudiée, on néglige la poussée d'Archimède dans tout l'exercice).



Question (4. 1)

Ecrire la longueur du ressort h à l'équilibre en fonction de l_0, k, m et g.

Question (4. 2)

On s'intéresse au mouvement du corps, repéré par l'altitude $z(t)$ du centre de gravité M le long d'un axe orienté vers le bas, l'origine étant prise à la position d'équilibre. Faire un schéma à l'équilibre et à l'origine.

Question (4. 3)
Ecrire l'équation différentielle suivie par $z(t)$ en prenant en compte une force de frottement $F = -\alpha v$. Donner la pulsation propre et le facteur de qualité correspondants.

Question (4. 4)
Dans le cas d'un faible amortissement, représentez l'allure de $z(t)$ si A est fixe, et que l'on lâche la masse sans vitesse initiale depuis la position $z(t=0) = z_1 > 0$.

Question (4. 5)
A l'aide d'un piston, on impose une force sur le point d'attache A de sorte que sa position change avec le temps selon $z_A(t) = z_{A,0} + z_m \cos(\omega t)$ autour de la position précédente. Faire un schéma faisant apparaitre h, z_A et z.

Question (4. 6)
Ecrire alors l'équation différentielle suivie par z.

Question (4. 7)
Calculer alors l'amplitude z_0 des oscillations du corps en régime permanent. On utilisera l'outil complexe, et on donnera le résultat en faisant apparaitre la pulsation propre ω_0, le facteur de qualité Q et la variable réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Question (4. 8)
Pour des grandes valeurs du facteur de qualité (en pratique, $Q > 2$ suffit), on estime qu'il y a résonance à la pulsation propre $\omega_r = \omega_0$. Que vaut alors l'amplitude maximale des oscillations ?

Question (4. 9)
Tracer (en justifiant) l'allure de $z_0(\omega)$ pour deux valeurs de Q : $Q \gg 1$ et $Q \ll 1$.

Question (4. 10)
L'intérêt de ce dispositif est qu'il permet d'entretenir des oscillations du corps d'amplitude $z_0 \geqslant z_A$. On veut que $z_0 \geqslant 3z_A$. A quelle condition approximative sur Q cette exigence correspond ?

Question (4. 11)
Si $Q = 4$, dans quel intervalle doit se trouver ω pour que $z_0 \geqslant 3z_A$?

5 Oscillations de Rabi et résonance magnétique nucléaire (Facultatif)

On introduit lors de l'étude de la structure de la matière l'existence d'un nombre quantique appelé nombre quantique de spin (on parle plus simplement de spin) qui pour les électrons peut valoir $+1/2$ ou $-1/2$. De manière plus générale, le spin, que ce soit pour un électron ou pour un noyau atomique se mesure à l'aide de champ magnétique le long d'une direction, on fixera ici cette direction comme l'axe Oz. La probabilité de trouver à l'instant t la particule dans l'état $+1/2$ (respectivement $-1/2$) est notée $P_+(t)$ (resp. $P_-(t)$). Ces probabilités se calculent grâce à deux fonctions complexes $b_+(t)$ et $b_-(t)$ et on a $P_+ = |b_+(t)|^2$ et $P_-(t) = |b_-(t)|^2$.

En présence d'un champ magnétique superposition d'un champ constant selon l'axe Oz et d'un champ tournant dans le plan Oxy à la pulsation ω, de la forme $\vec{B} = B_0\vec{u}_z + B_1 \cos\omega t\vec{u}_x + B_2 \sin\omega t\vec{u}_y$ on peut montrer que les fonctions $b_\pm$ suivent les équations différentielles couplées :

$$\begin{aligned} i\frac{db_+}{dt} &= (\omega_0 - \omega)b_+ + \omega_1 b_- \\ i\frac{db_-}{dt} &= \omega_1 b_+ + (\omega - \omega_0)b_- \end{aligned}$$

si on pose $\omega_0 = -\alpha B_0$ et $\omega_1 = -\alpha B_1$ (la constante α découle de calculs et de définitions de mécanique quantique qui ne nous intéressent pas ici), et que l'on appelle i le complexe de partie imaginaire positive tel que $i^2 = -1$

Question (5. 1)
En utilisant le fait que la particule ne peut se trouver que dans l'état $+$ ou dans l'état $-$, écrire la relation liant à tout temps P_+ et P_-, puis celle entre b_+ et b_-.

Question (5. 2)
Montrer que ces deux fonctions suivent une équation d'oscillateur harmonique du type $\frac{d^2y}{dt^2} + \Omega^2 y = 0$, en exprimant la pulsation propre Ω en fonction de ω, ω_0 et ω_1.

Question (5. 3)

On suppose à l'instant initial $t = 0$ que la particule est dans l'état $+$. Que peut-on dire des modules de b_+ et b_- ? On peut aussi choisir librement l'argument de l'un des deux, donc on choisit que $\text{Arg}(b_+(t = 0)) = 0$.

Question (5. 4)

Exprimer alors les conditions initiales $b_+(t = 0)$ et $b_-(t = 0)$, ainsi que $\frac{db_+}{dt}(t = 0)$ et $\frac{db_-}{dt}(t = 0)$.

Question (5. 5)

Résoudre les deux équations différentielles, et montrer que :

$$\begin{aligned} b_-(t) &= -i\frac{\omega_1}{\Omega}\sin(\Omega t) \\ b_+(t) &= \cos(\Omega t) + i\frac{\omega - \omega_0}{\Omega}\sin(\Omega t) \end{aligned}$$

Question (5. 6)

Vérifier que la relation trouvée à la première question est toujours valable.

Question (5. 7)

Calculer $P_{+\to-}(t = \frac{\pi}{2\Omega})$ la probabilité de trouver la particule dans l'état $-$ à l'instant $t = \frac{\pi}{2\Omega}$.

Question (5. 8)

Déterminer pour quelle valeur de la pulsation ω cette probabilité est maximale et que vaut alors le maximum. Commenter sur la valeur de B_1 qu'il faut choisir.

Question (5. 9)

Déterminer alors la bande passante en pulsation de cette résonance.

L'expérience que l'on vient de décrire a été réalisée pour la première fois par Rabi en 1939, et elle a alors permis d'avoir une mesure 1000 fois plus précise que celle que l'on avait alors de la constante α pour un proton, puisque la mesure de la pulsation de résonance et de B_0 permet de remonter directement à cette valeur. Cette résonance très piquée en pratique permet de faire des mesures très précises de la quantité de particules de spin 1/2, en particulier la mesure d'une quantité de protons (noyau d'hydrogènes) qui permet de revenir soit à la composition d'une molécule en chimie (spectre RMN) soit à la composition en eau d'un tissu, et permet donc une imagerie médicale de qualité, complémentaire de la radiographie : l'imagerie par résonance magnétique (IRM).