TD 19 - Solide en rotation

1 Exercice 1- Etude du pendule pesant

On considère un pendule pesant constitué d'une tige homogène de masse m de longueur L au bout de laquelle est attachée une masse M.

Question (1. 1)
Quel est le moment d'inertie de ce pendule autour de son axe de rotation ? (On rappelle que le moment d'inertie d'une barre homogène de masse m et de longueur L autour d'un axe passant perpendiculairement par un de ses bords est $J = \frac{1}{3}mL^2$.)

Question (1. 2)
Déterminer le moment par rapport à l'axe de rotation des forces exercées sur ce pendule.

Question (1. 3)
En déduire l'équation horaire du mouvement.

Question (1. 4)
Quelles seraient les caractéristiques d'un pendule simple ayant les mêmes propriétés ?

2 Exercice 2- Parachute ascensionnel

Une attraction commune sur les plages l'été est la pratique du parachute ascensionnel : on attache une personne à un parachute et à un hors-bord. Quand le bateau prend de la vitesse, la personne s'élève dans les airs derrière lui. Nous allons déterminer dans cet exercice pourquoi.

On considère le parachutiste et la voile comme un point matériel M de masse $m = 100$ kg, relié au pont A du bateau par un câble de longueur $L = 100$ m faisant un angle $\alpha = 40°$ avec l'horizontale. Le bateau avance à vitesse constante le long d'une trajectoire rectiligne. L'air exerce sur la voile du parachute une force qui peut être décomposée en une composante verticale (la portance) vers le haut d'intensité F_p et une composante horizontale (la trainée) opposée à la vitesse d'intensité $F_t = 6,4$ kN.

Question (2. 1)
Faire un schéma de la situation.

Question (2. 2)
Effectuer le bilan des forces appliquées à M et déterminer leurs moments par rapport à l'axe de rotation du câble en A.

Question (2. 3)
Le référentiel du bateau est-il galiléen ?

Question (2. 4)
Appliquer alors le théorème du moment cinétique en M par rapport à l'axe de rotation du câble. En déduire l'intensité de la force F_p.

Question (2. 5)
Appliquer le PFD à M dans le référentiel du bateau et en déduire la tension du câble. La résistance du câble est de l'ordre de 20 kN, est-ce que cette activité est dangereuse ?

3 Exercice 3- Mesure de la constante universelle de gravitation

En 1789, le physicien britannique Cavendish a utilisé un dispositif expérimental afin de mesurer la valeur de la constante gravitationnelle G qui apparaît dans la loi de la gravitation universelle de Newton entre deux masses m_A et m_B où l'action exercée par A sur B est modélisée par une force $\vec{F}_{A\to B} = -G\frac{m_A m_B}{||\vec{AB}||^3}\vec{AB}$.

Le dispositif est constitué d'abord d'un pendule de torsion : une tige horizontale de longueur $l = 180$ cm au bout de laquelle sont liées deux masses $m = 0,72$ kg, attachée à un fil de torsion vertical très fin de constante de torsion C. Ainsi, si la tige tourne d'un angle θ par rapport à la position d'équilibre, le fil exerce un couple par rapport à sa direction $\Gamma = -C\theta$.

Question (3. 1)
On va dans un premier temps faire osciller le système autour de sa position d'équilibre afin de déterminer la valeur de la constante de torsion. En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que l'angle θ que fait la tige avec sa position d'équilibre suit une équation d'oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{2C}{ml^2}}$.

Question (3. 2)
Lors de cette expérience préliminaire, Cavendish mesure une période $T_0 = 7,0$ min. Quelle est la valeur de la constante de torsion ?

On ajoute maintenant deux grosses masses $M = 160$ kg de plomb à une distance $r = 20$ cm de chaque côté du pendule de torsion, perpendiculairement à la position d'équilibre de la tige et de part et d'autre.

Question (3. 3)
Déterminer l'angle θ de la déviation créé par la présence des deux masses, sachant qu'elle est très faible, et que l'on peut négliger l'attraction exercée par une des masses de 160 kg sur la masse située à l'autre bout du pendule.

Question (3. 4)
La valeur obtenue par Cavendish avec ce dispositif est $G_{mes} = 6,75.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} (la valeur retenue actuellement est $G_{th} = 6,67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}). En déduire la déviation observée par Cavendish et commenter.

4 Exercice 4- Monte charge à crémaillère

Un système roue-crémaillère est constitué d'une roue dentée entrainant une tige portant des dentures de même dimension.

On considère dans cet exercice un tel système avec une roue de rayon R et de moment d'inertie J tournant autour d'un axe fixe z horizontal. Un moteur exerce sur la roue un couple autour de l'axe z Γ_z, et les frottements qui s'exercent sur la roue sont proportionnels à la vitesse de rotation ω. La roue exerce sur la tige verticale une force dirigée vers le haut d'intensité F. L'ensemble de la tige et de la charge à élever est noté M et a une masse m.

Question (4. 1)
Ecrire la relation entre la vitesse de rotation de la roue ω et la vitesse de montée de la charge v.

Question (4. 2)
Déterminer la relation entre v et F.

Question (4. 3)
Appliquer la loi du moment cinétique à la roue. En déduire l'équation différentielle suivie par ω (sans faire intervenir F).

Question (4. 4)
On suppose que le couple moteur Γ_z est constant, et qu'à l'instant initial, la roue a une vitesse angulaire nulle. Intégrer l'équation différentielle et en déduire la vitesse limite de levage v_{lim}.

Question (4. 5)
Effectuer un bilan d'énergie pour le système roue-crémaillère entre l'instant initial et l'instant t où la charge est montée d'une hauteur h.