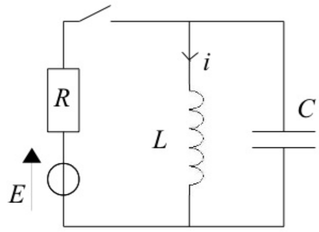
TD 15 - Oscillateurs amortis

1 Exercice 1- Considérations qualitatives

On considère le circuit ci-contre, dont on ferme l'interrupteur à $t = 0$, le condensateur étant déchargé.



Question (1. 1)
Déterminer $i(0^+)$ et $\frac{di}{dt}(0^+)$.

Question (1. 2)
Déterminer $i(t = \infty)$.

Question (1. 3)
En déduire l'allure de $i(t)$ en fonction du régime.

Question (1. 4)
On propose ces 3 équations différentielles pour $i(t)$. Eliminer les deux qui ne conviennent pas en justifiant.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2i}{dt^2} + RC\frac{di}{dt} + LCi &= \frac{E}{R} \\
\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i &= 0 \\
\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i &= \frac{E}{RLC}
\end{aligned}$$

Question (1. 5)
En déduire alors ω_0 et Q pour ce circuit.

2 Exercice 2- Mesure de tension à l'oscilloscope

On étudie le système électrique vu en cours : la réponse libre d'un circuit RLC série.

Question (2. 1)
Faire un schéma du circuit.

Question (2. 2)
Etablir l'équation différentielle suivie par $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps. Mettre cette équation différentielle sous forme canonique en introduisant une pulsation propre ω_0 et un facteur de qualité Q qu'on exprimera en fonction de R, L et C.

Question (2. 3)
On se place en régime pseudo-périodique. Quelle est la conséquence sur les valeurs de Q et R ?

On montre que la solution est alors de la forme :

$$u(t) = e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t),$$

avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

Question (2. 4)
Dans le cas faiblement amorti, simplifier l'expression de la pseudo-pulsation ω.

Question (2. 5)
On veut observer $u(t)$ à l'oscilloscope, on utilise donc à la place de la source de tension idéale un GBF alimentant le circuit en signal créneau de fréquence f_{GBF}. Comment choisir f_{GBF} en fonction de ω_0 et Q pour observer tout le régime transitoire ?

Question (2. 6)
La courbe obtenue à l'oscilloscope est donnée ci-dessous. En estimant que l'amortissement est faible, estimer ω_0.

Question (2. 7)

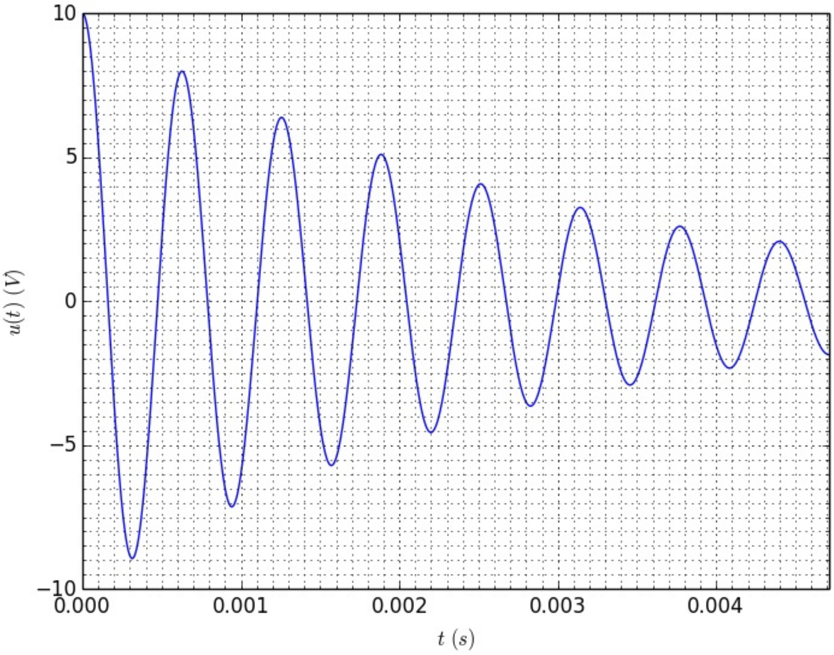
Pour estimer Q, on introduit le décrément logarithmique $\delta = \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right)$ où T est la pseudo-période. Montrer que $\delta \simeq \frac{\pi}{Q}$.

Question (2. 8)

Mesurer δ et en déduire Q.

Question (2. 9)

Sachant que $C = 100$ nF, déterminer R et L.



3 Exercice 3- Bille accrochée à un ressort dans l'eau

On considère une bille de masse volumique ρ uniforme de rayon R, suspendue à un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. Pendant toute l'expérience, la bille est plongée dans un fluide (liquide ou gaz) qui exerce une force de frottement (on néglige la poussée d'Archimède). La projection de cette force de frottement sur l'axe vertical Oz peut s'écrire $F = -\alpha v$ où v est la projection de la vitesse de la bille long de l'axe Oz. Dans le cadre de cette exercice, on sait que $\alpha = 6\pi\eta R$ avec η la viscosité du fluide en Pa.s. A l'instant $t = 0$ on communique une vitesse initiale $v_0 > 0$ à la bille qui était à sa position d'équilibre. On rappelle que le volume d'une boule de rayon R est $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Question (3. 1)

Faire un schéma de la situation à l'équilibre et pour un temps quelconque, en orientant l'axe Oz vers le bas et en prenant l'origine de l'axe O à la position d'équilibre.

Question (3. 2)

Exprimer la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de l_0, m, g et k.

Question (3. 3)

Etablir l'équation différentielle suivie par $z(t)$, pus la mettre sous forme canonique. Exprimer la pulsation propre et le facteur de qualité en fonction de k ; m et α puis en fonction de k, ρ, R et η. On remarque donc qu'une mesure de Q donne accès à la valeur de η : on a réalisé un viscosimètre.

Question (3. 4)

Exprimer le rayon critique R_C de la bille pour lequel le mouvement est dans le régime critique. On fera l'application numérique pour une bille d'acier ($\rho \sim 10^4$ kg.m^{-3}) baignant dans de l'eau

($\eta \sim 10^{-3}$ Pa.s) reliée à un ressort de constante de raideur $k = 10^2$ N/m. Quel type de mouvement va t'on observer avec une bille de taille "classique" ?

Question (3. 5)
Représenter l'allure de la solution.

Question (3. 6)
La bille de départ est remplacée par une autre bille du même matériau mais de rayon deux fois plus grand. Tracer l'allure de la solution avec la même échelle ou sur le même graphique.

4 Exercice 4- Antiparasitage d'un moteur à courant continu

Un moteur à courant continu est assimilé à une inductance $L \simeq 0,10$ H et une résistance $R \simeq 10\ \Omega$ alimenté par une tension continue $E = 10$ V.

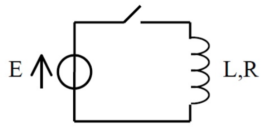


figure 1

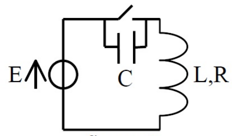


figure 2

Question (4. 1)
A l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur de la figure 1 alors qu'il était fermé depuis longtemps. Montrer qu'il y a un problème. En pratique, il va se produire une étincelle au niveau de l'interrupteur.

Question (4. 2)
On modélise maintenant de manière plus précise l'interrupteur en lui ajoutant en parallèle un condensateur de capacité faible $C = 10$ pF (figure 2). Etablir alors les conditions initiales sur la tension aux bornes du condensateur $u(t = 0+)$ et $\frac{du}{dt}(t = 0^+)$.

Question (4. 3)
Etablir l'équation différentielle suivie par $u(t)$ pour $t > 0$, la mettre sous forme canonique et exprimer ω_0 et Q en fonction des données.

Question (4. 4)
Quel est le type du régime auquel on a affaire ? Tracer alors l'allure de $u(t)$. Repérer sur le graphique t_{max} l'instant où la tension est maximale.

Question (4. 5)
En résolvant l'équation différentielle, on trouve que $u(t) \simeq E + EQe^{\frac{-\omega_0 t}{2Q}} \sin(\omega_0 t)$. Montrer alors que $u(t_{max}) \simeq QE$. Faire l'application numérique, commenter.

Question (4. 6)
L'antiparasitage consiste à ajouter un condensateur à un interrupteur afin d'éviter les grandes surtensions (qui pourraient créer des étincelles ou brouiller des transmissions radio ou wifi). On étudie donc un système similaire à celui de la figure 2, où C est la capacité du condensateur ajouté. Quelle doit être la valeur de la capacité du condensateur afin que $u(t_{max})$ ne dépasse pas 200 V ?