TD 14 - Oscillateurs harmoniques

1 Exercice 1- Mesure de la masse en apesanteur

Lors de leur séjour dans la station spatiale internationale, la santé des astronautes est surveillée quotidiennement. Cependant, à cause de l'apesanteur régnant dans la station, il n'est pas possible d'utiliser un pèse-personne classique pour mesurer leur masse : ces pèse-personnes mesurent la force exercée par la gravité terrestre sur le sujet (son poids) et converti ce poids (en N) en masse (en kg) par la formule $P = mg$. Pour pallier ce problème, la masse des astronautes est mesurée en utilisant un ressort (longueur à vide $l_0 = 1{,}0$ m et constante de raideur $k = 6,0.10^2$ N/m) fixé à la station auquel est attachée une chaise. L'astronaute de masse m s'accroche à la chaise, puis on l'écarte de $x_0 = 30$ cm et on le lâche sans vitesse initiale. On mesure alors la période T des oscillations du système.

Question (1. 1)
Faire un schéma à l'équilibre et à un instant $t > 0$ quelconque. On prendra l'origine O de l'axe x à la longueur à vide $l = l_0$.

Question (1. 2)
Etablir l'équation différentielle suivie par $x(t)$ la position de l'astronaute en fonction du temps.

Question (1. 3)
Résoudre cette équation différentielle.

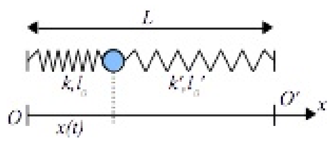
Question (1. 4)
On mesure $T = 2,33$ s pour un astronaute qui est parti de Terre avec une masse $m_0 = 60$ kg. Trouver la masse m et commenter.

Question (1. 5)
On fait l'expérience à vide (sans astronaute) et on trouve $T' = 1,28$ s. Quelle est la valeur de la masse de l'astronaute ?

Question (1. 6)
Trouver quelle est l'accélération maximale subie par l'astronaute durant la mesure ? Commenter.

2 Exercice 2- Masse reliée à deux ressorts

Une masse m est reliée à deux ressorts fixés en O et O' et elle glisse sans frottement sur un rail horizontal. On repère la position de la masse par $x(t)$ la distance entre algébrique entre O et la masse. La distance OO' est notée L. Les caractéristiques des ressorts sont k et l_0 pour le ressort fixé en O et k' et l_0' pour celui fixé en O'. En $t = 0$, la masse est lâchée sans vitesse initiale de $x(t = 0) = x_0$.



Question (2. 1)
Exprimer les projections sur l'axe Ox des forces exercées par les ressorts sur la masse en fonction des données et de leurs longueurs respectives l et l' en faisant attention au signe.

Question (2. 2)
Exprimer les longueurs l et l' en fonction de x et d'une donnée du problème, puis en déduire les projections de forces précédentes en fonction de x et des données.

Question (2. 3)
On appelle x_{eq} la position d'équilibre de la masse m. Exprimer la valeur de x_{eq} en fonction des données.

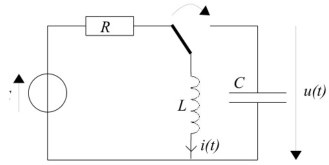
Question (2. 4)
Etablir l'équation différentielle suivie par $x(t)$, puis la mettre sous forme canonique en introduisant la pulsation propre adaptée ω_0, exprimée en fonction de k, k' et m.

Question (2. 5)
Prédire et dessiner l'allure de la solution qualitativement.

Question (2. 6)
Résoudre l'équation différentielle et vérifier la solution prédite à la question précédente.

3 Exercice 3- Circuit LC

On considère le circuit ci-contre, qui est dans cet état depuis longtemps (régime permanent) et le condensateur est préalablement déchargé. A l'instant $t = 0$, on bascule l'interrupteur.



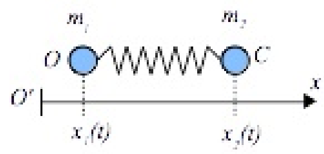
Question (3. 1)
Déterminer $i(t = 0^-)$ et $u(t = 0^-)$, puis en déduire les conditions initiales (à $t = 0^+$).

Question (3. 2)
Etablir l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$, puis la mettre sous la forme canonique. Montrer rapidement que l'équation suivie par $u(t)$ est du même type.

Question (3. 3)
Résoudre l'équation pour $i(t)$ et représenter l'allure.

4 Exercice 4- Oscillations d'une molécule diatomique

On considère une molécule constitué de deux atomes (par exemple CO). On appelle m_1 (resp. m_2) la masse de l'atome 1 (resp. 2), et on modélise la liaison covalente par un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k.
On considère de plus que le mouvement des deux atomes n'a lieu que le long de l'axe x et à l'instant initial on note leurs positions $x_1(0) = 0$ et $x_2(0) = x_{2,0}$, et les deux vitesses sont nulles.



Question (4. 1)
En ne considérant que le ressort, exprimer la force s'exerçant sur l'atome 1 et en déduire l'équation différentielle suivie par $x_1(t)$.

Question (4. 2)
Faire de même avec le deuxième atome pour trouver l'équation différentielle suivie par $x_2(t)$.

Question (4. 3)
On obtient alors un système de deux équations différentielles couplées ($x_1(t)$ apparait dans l'équation différentielle de x_2 et vice-versa), que l'on ne sait pas résoudre directement. On pose alors $s = m_1x_1 + m_2x_2$ et $d = x_2 - x_1$. Quelles sont les équations différentielles suivies par s et d ? Sont-elles couplées ?

Question (4. 4)
Résoudre ces deux équations différentielles, et en déduire $x_1(t)$ et $x_2(t)$. On posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}}$.

Question (4. 5)
Simplifier les résultats précédents dans le cas d'une molécule formée d'atomes identiques (par exemple O_2) et dans le cas d'une molécule telle que $m_1 \gg m_2$ (par exemple HCl) et commenter.