TD 1 - Unités, dimensions et incertitudes

1 Conversion d'unités dérivées en unités de base

Question (1.1)

Pour chaque unité dérivée, donnez l'écriture en termes de produits des unités de base du SI.

1.1.a.) le hertz, Hz, unité de fréquence ;

1.1.b.) le newton, N, unité de force ;

1.1.c.) le pascal, Pa, unité de pression ;

1.1.d.) le joule, J, unité d'énergie (pensez à une formule d'Einstein) ;

1.1.e.) le watt, W, unité de puissance (pensez à l'unité de consommation usuelle de consommation d'énergie électrique) ;

1.1.f.) le coulomb, C, unité de charge électrique (pensez à la définition du courant électrique) ;

1.1.g.) le volt, V, unité du potentiel électrique (l'énergie électrostatique d'un conducteur est égale à sa charge multipliée par son potentiel) ;

1.1.h.) l'ohm, Ω, unité de résistance électrique ;

1.1.i.) le farad, F, unité de capacité électrostatique (l'énergie stockée dans un condensateur est égale à la moitié de la valeur de sa capacité multipliée par le carré de la tension à ses bornes) ;

1.1.j.) l'henry, H, unité de l'inductance électromagnétique (l'énergie stockée dans une bobine est égale à la moitié de la valeur de son inductance multipliée par le carré du courant qui la traverse).

2 Homogénéité de formules

Question (2.1)

Vérifiez que les formulez suivantes sont homogènes. Si elles ne le sont pas, proposez une formule homogène avec les mêmes grandeurs en apportant le moins de corrections possible.

2.1.a.) $E = mgh^2$ où E est une énergie, m une masse, g une accélération et h une hauteur.

2.1.b.) $u(t) = Ue^{t^2}$ où u et U sont des tensions et t un temps.

2.1.c.) $\lambda = cf$ avec λ une longueur, c une vitesse et f une fréquence.

2.1.d.) $s(t) = A\cos(2\pi(ft^2 + \delta/\lambda))$ où s, A, δ et λ sont des longueurs, f une fréquence et t un temps.

2.1.e.) $U = \frac{R(R_1I_1+R_2I_2)}{R+r_0+R_1R_2/(R_1+R_2)}$ où U est une tension, I_1 et I_2 des courants et R, r_0, R_1 et R_2 des résistances.

2.1.f.) $\omega = \sqrt{k^2/m^3}$ où ω est une pulsation, k une constante de raideur (en N.m^{-1}) et m une masse.

2.1.g.) $\overline{O_2A'} = \frac{\frac{\overline{O_1A}f_1'f_2'}{\overline{O_1A}+f_1'+f_2'}}{\overline{O_1O_2}+\frac{\overline{O_1A}f_2'}{f_1'+f_2'}+\frac{1}{f_2'}}$ où toutes les grandeurs sont des longueurs.

3 Epaisseur de l'atmosphère

Les molécules d'un gaz sont continuellement agitées d'un mouvement dû à la température. Cette agitation est prise en compte à travers l'énergie cinétique des molécules, et cette énergie cinétique entre en compétition avec l'énergie potentielle de pesanteur pour les éloigner de la surface de la Terre.

Question (3.1)

Exprimer l'énergie cinétique moyenne E_C d'une molécule en fonction de la constante de Boltzmann k_B exprimée en J.K^{-1} et de la température T en K.

Question (3.2)

Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur E_P en fonction de la hauteur h, de la masse m d'une molécule et de l'accélération de la pesanteur.

Question (3.3)
La probabilité pour une molécule d'être située à l'altitude h est proportionnelle à e^{-E_P/E_C}. Exprimez cette probabilité sous la forme e^{-h/h_0} en faisant apparaitre une hauteur caractéristique h_0.

Question (3.4)
On estime que pour une loi de décroissance exponentielle e^{-x/x_0}, le signal mesuré est nul à partir de $X = 10x_0$. Donnez la formule littérale permettant de calculer l'épaisseur de l'atmosphère H.

Question (3.5)
Faites l'application numérique pour une molécule de dioxygène avec les valeurs $m = 5,3 \times 10^{-26}$ kg, g = 9,81 m.s^{-2}, $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1}, $T = 300$ K. Commentez.

4 3$^{\text{ème}}$ loi de Kepler

En étudiant le mouvement des planètes autour du Soleil, Kepler a pu établir que ce mouvement pouvait être décrit avec 3 lois, qui ont ensuite été démontrées par Newton avec la loi de gravitation universelle et que nous verrons ultérieurement. La première loi décrit la trajectoire des planètes (ce sont des ellipses), la deuxième la variation de vitesse de chaque planète le long de sa trajectoire, et la troisième fait le lien entre leur distance au Soleil et la période.

On va supposer dans cette exercice que la période de révolution d'une planète dépend de la longueur du demi-grand axe de l'ellipse a, de la masse du Soleil M et de la constante universelle de gravitation G.

Question (4.1)
En utilisant la loi de Newton de la gravitation universelle qui donne l'intensité de la force de gravitation F entre deux astres de masses m_1 et m_2 éloignées d'une distance r : $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$, donnez l'unité SI que l'on peut rattacher à G.

Question (4.2)
En déduire le lien que Kepler a établi entre T et a.

5 Incertitudes de mesure 1

On souhaite mesurer le courant qui traverse une résistance soumise à la tension délivrée par une source de tension. La résistance présente 4 anneaux de couleurs respectives marron, vert, rouge et or, ce qui signifie que la valeur de la résistance est $R = 1,5$ kΩ avec une incertitude relative de 5 % et la source de tension délivre une tension $U = 12,0$ avec une incertitude type $u(U) = 0,1$ V.

Question (5.1)
Que vaut le courant d'après ces données ?

Question (5.2)
En utilisant un milliampèremètre, la valeur lue sur l'écran est 7,83 mA et la précision de l'appareil est de 5 % . Comment écrire le résultat de ce mesurage ?

Question (5.3)
Que peut-on en déduire ?

6 Incertitudes de mesure 2

On souhaite étudier les périodes d'oscillation d'un système constitué d'une masse attachée à un ressort pendu verticalement.

Pour ce faire, on effectue 10 mesures de la période, et on trouve les valeurs :

Periode mesurée (s)	1,22	1,18	1,21	1,28	1,16	1,25	1,20	1,15	1,24	1,19

Question (6.1)
A l'aide d'un tableur ou de votre calculette, déterminez T_{mes} la meilleure estimation de la période.

Question (6.2)
Déterminez de même l'incertitude associée $u(T_{mes})$. De quelle type d'incertitude s'agit-il ?

Question (6.3)

L'expérimentateur souhaite maintenant communiquer son résultat expérimental avec un taux de confiance de 95 % . Dans ce cas, il faut prendre une incertitude élargie $U_{95\%}(T_{mes}) = t \times u(T_{mes})$ où t est un coefficient sans dimension appelé coefficient de Student et qui dépend du nombre de mesures effectuées n. (On remarque qu'on retrouve bien $n \simeq 2$ quand on fait un grand nombre de mesures).

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	20	50	∞
t	12,7	4,3	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,2	2,16	2,09	2,01	1,96

Présentez le résultat expérimental avec un taux de confiance de 95 % .

Question (6.4)

On suppose que la période d'oscillation T peut dépendre de la constante de raideur du ressort k (en N.m^{-1}), de la masse m et de l'accélération de la pesanteur g. Montrez par analyse dimensionnelle que T ne dépend pas de g.

Question (6.5)

On montre théoriquement que $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Les mesures effectuées sur la masse et le ressort donnent $m = 99,89 \pm 0,02$ g et $k = 3,645 \pm 0,008 \times 10^{-2}$ U.S.I et on donne la formule pour calculer l' incertitude $u(f)$ d'une fonction de deux variables $f = \sqrt{a/b}$ en fonction des incertitudes sur a et b u(a) et u(b) :

$$u(f) = \sqrt{\frac{u(a)^2}{4ab} + \frac{au(b)^2}{4b^3}}$$

6.5.a.) Montrez que la formule de propagation des incertitudes est bien homogène.

6.5.b.) Déterminez le résultat théorique de la période du pendule.

6.5.c.) Concluez sur l'accord théorie-expérience.

Question (6.6)

Comment pourrait-on améliorer la précision sur la mesure de la période ?