

# CHAPITRE 0

## PRÉSENTER UN RÉSULTAT EXPÉRIMENTAL ET VALIDATION D'UN MODÈLE

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Grandeurs physiques et unités</b>	<b>2</b>
1.1	Représentation d'une grandeur physique . . . . .	2
1.1.1	Mesure d'une grandeur physique . . . . .	2
1.2	Manipulation de formules . . . . .	2
1.2.1	Calculs . . . . .	2
1.2.2	Homogénéité . . . . .	2
1.3	Unités du système international . . . . .	3
1.3.1	Unités de base . . . . .	3
1.3.2	Unités dérivées . . . . .	3
1.3.3	Multiples et sous-multiples . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Mesures, erreurs et incertitudes</b>	<b>4</b>
2.1	Erreurs de mesure . . . . .	4
2.1.1	Erreurs systématiques . . . . .	4
2.1.2	Erreurs aléatoires . . . . .	5
2.2	Incertitudes . . . . .	6
2.2.1	Incertitudes de type A . . . . .	6
2.2.2	Incertitudes de type B . . . . .	6
2.2.3	Autres incertitudes . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Présentation d'un résultat</b>	<b>6</b>
3.1	Chiffres significatifs . . . . .	7
3.2	Règles d'utilisation . . . . .	7
3.2.1	Chiffres significatifs . . . . .	7
3.2.2	$z$ -score . . . . .	7
3.2.3	Propagation des incertitudes . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Validation d'un modèle expérimental</b>	<b>9</b>
4.1	Principe de la régression linéaire . . . . .	10
4.2	Validation de la régression linéaire . . . . .	10
4.3	Exploitation de la régression linéaire . . . . .	10

# 1 Grandeurs physiques et unités

La physique, comme toutes les sciences expérimentales, nécessite des va et vient incessants entre modèles théoriques et observations expérimentales. En effet, seule la comparaison des observations expérimentales avec les prévisions d'un modèle théorique permet de valider ou non le modèle en question. La seule chose que l'on sait comparer sont des nombres (qu'est ce qui est le plus "bleu" entre le "rouge" et le "jaune" ?), il est donc nécessaire de traduire les grandeurs physiques en chiffres pour les comparer, c'est le but de la mesure.

## 1.1 Représentation d'une grandeur physique

On représente une grandeur physique pour pouvoir l'évoquer. On utilise pour ce faire soit une lettre (par exemple  $c$  pour la vitesse de la lumière dans le vide dans la célèbre formule  $E = mc^2$ ) ou par un nombre, obtenu par une mesure ou par un calcul. Dans les deux cas, on peut utiliser cette représentation dans des calculs (on parle respectivement de calculs *littéraux* et *numériques*). Il y a toutefois des règles à respecter que nous allons aborder ensemble.

### 1.1.1 Mesure d'une grandeur physique

Considérons le cas de la tour Eiffel, et en particulier la grandeur physique qui est sa hauteur. On peut la noter  $h$  : représentation littérale. Si on veut la représenter de manière numérique on peut représenter cette hauteur par le nombre 324 m dans le système métrique, ou bien encore 1063 pieds dans le système impérial. Vu qu'il s'agit à chaque fois de la même grandeur physique, toutes ces représentations sont égales on a donc :

$$h = 324 \text{ m} = 1063 \text{ ft}$$

Il est important de bien visualiser l'importance de préciser l'unité, sinon on écrit  $324 = 1063$ , et tous les profs de maths se retournent dans leur tombe.

La représentation numérique d'une grandeur n'a aucun sens si l'unité n'est pas précisée. Un résultat numérique présenté sans unité ne sera *jamais* pris en compte.

## 1.2 Manipulation de formules

### 1.2.1 Calculs

On peut faire des calculs tant avec les représentations numériques que littérales, mais il y a des règles à respecter.

- additions et soustractions : possible *uniquement* si les grandeurs ont la même unité (exemples)
- multiplications et divisions : toujours possible *mais* il faut multiplier ou diviser les unités aussi (exemples)
- fonctions mathématiques : ne marchent *uniquement* que sur des nombres sans unités (exemples)

### 1.2.2 Homogénéité

Les deux membres d'une égalité doivent avoir la même unité. Ceci présente deux intérêts majeurs :

1. Vérifier que la formule utilisée n'est pas absurde fausse. Par exemple  $v \neq d \times t$ . Il y a des erreurs types qui permettent de se rendre compte qu'il y a des étourderies dans un calcul :

$$l + 1/l' \quad \exp(t) \quad \frac{R_1 R_2}{1 + R_3}$$

2. Essayer de trouver l'influence de chaque paramètre sur un phénomène. Par exemple, pour estimer la période  $T$  d'un pendule simple, on peut faire l'hypothèse qu'elle dépend de la masse  $m$  du pendule (en kg), de sa longueur  $L$  (en m) et de l'accélération de la pesanteur  $g$  (en  $\text{m.s}^{-2}$ ). On fait alors l'hypothèse que la période du pendule suit une *loi de puissance*, c'est-à-dire que chaque paramètre d'influence répertorié apparaît avec une puissance donnée dans l'expression, par exemple qu'il existe 3 coefficients  $x, y, z$  tels que l'on puisse écrire  $T = km^x L^y g^z$  où  $k$  est un facteur sans unité que l'on ne pourra pas déterminer par cette méthode. en travaillant sur les unités, on voit que  $[km^x L^y g^z] = \text{kg}^x \cdot \text{m}^{y+z} \cdot \text{s}^{-2z}$ . Pour que cette formule donne bien une période, il faut que cette expression soit une durée, donc qu'elle s'exprime en  $s$  donc il vérifie le système de 3 équations  $x = 0$ ,  $y + z = 0$  et  $-2z = 1$ . On trouve ainsi une formule de la forme  $T = k\sqrt{L/g}$  (on verra dans le cours de mécanique que  $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ ), ce qui nous permet facilement de savoir que pour doubler la période d'un pendule, il faut un fil 4 fois plus long (et que la masse n'a aucune influence sur la période!).

## 1.3 Unités du système international

Unités de mesure de longueur : mètre, pouce, pied, coudée, yard, année-lumière,...

Question : j'arrive à monter au sommet de la tour Eiffel de 1063 pieds alors que je mesure 1,75 m. A quelle altitude est le sommet de ma tête ? Nécessité d'utiliser les mêmes unités → système international.

### 1.3.1 Unités de base

Pas nécessaire d'avoir une unité bien définie pour toutes les grandeurs, par exemple, avec une unité de longueur et une de temps, on a aussi : une unité de surface, une unité de volume, une unité de vitesse, une unité d'accélération, etc.

Le bureau international des poids et mesures (BIPM, qui siège en France et créé par la conférence du mètre en 1875) est l'institut chargé de définir les unités de base du système international (SI). A l'heure actuelle, il y a sept unités de base :

- longueur : mètre, m
- temps : seconde, s
- masse : kilogramme, kg (attention au kilo)
- courant électrique : ampère, A
- température thermodynamique : kelvin, K
- quantité de matière : mole, mol
- intensité lumineuse : candela, cd

### 1.3.2 Unités dérivées

On peut ainsi exprimer l'unité SI de toutes les grandeurs physiques, en utilisant ces 7 unités de base. Par exemple, l'unité SI d'une force est  $kg.m.s^{-2}$  (on peut retrouver ce résultat avec la formule donnant le poids  $P = mg$  avec m la masse et g l'accélération de la pesanteur). De même, l'unité SI de la pression est  $kg.m^{-1}.s^{-2}$  (on rappelle qu'une force F sur une surface S exerce une pression  $P = F/S$ ).

On voit bien qu'exprimer les unités de toutes les grandeurs en fonction des unités de base du SI peut vite devenir fastidieux, on utilise donc des unités *dérivées* du SI.

On définit par exemple ainsi le newton N unité SI de force comme  $1 N = 1 kg.m.s^{-2}$ , et le pascal Pa unité SI de pression comme  $1 Pa = 1 N.m^{-2} = 1 kg.m^{-1}.s^{-2}$ .

On trouve dans le tableau de la figure 3 certaines de ces unités dérivées.

#### Remarque

Le newton apparait explicitement dans la définition de l'ampère, ce qui n'est pas gênant puisque l'ampère n'apparait pas dans les définitions de la seconde, du mètre et du kilogramme.

### 1.3.3 Multiples et sous-multiples

Il est aussi possible de multiplier ou diviser les unités par des puissances de dix en utilisant un préfixe. On peut ainsi diviser une unités en sous-multiples :

Puissance de dix	$10^{-15}$	$10^{-12}$	$10^{-9}$	$10^{-6}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$
Préfixe	femto-	pico-	nano-	micro-	milli-	centi-	déci-
Exemple	fm	pm	nm	μm	mm	cm	dm

ou bien encore multiplier une unité avec les préfixes :

Puissance de dix	$10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^6$	$10^9$	$10^{12}$	$10^{15}$
Préfixe	deca-	hecto-	kilo-	mega-	giga-	tera-	peta-
Exemple	dam	hm	km	Mm	Gm	Tm	Pm

unités SI dérivées			
grandeur	unité SI	symbole	expression symbolique
fréquence	hertz	Hz	$s^{-1}$
force	newton	N	$m.kg.s^{-2}$
pression, contrainte	pascal	Pa	$m^{-1}.kg.s^{-2}$
énergie, travail, quantité de chaleur	joule	J	$m^2.kg.s^{-2}$
puissance, flux énergétique	watt	W	$m^2.kg.s^{-3}$
quantité d'électricité, charge électrique	coulomb	C	$s.A$
potentiel électrique, tension électrique, force électromotrice	volt	V	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$
capacité électrique	farad	F	$m^{-2}.kg^{-1}.s^4.A^2$
résistance électrique	ohm	$\Omega$	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$
conductance	siemens	S	$m^{-2}.kg^{-1}.s^3.A^2$
flux d'induction magnétique	weber	Wb	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-1}$
induction magnétique	tesla	T	$kg.s^{-2}.A^{-1}$
inductance	henry	H	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-2}$
flux lumineux	lumen	lm	$cd.sr$
éclairage lumineux	lux	lx	$m^{-2}.cd.sr$
activité	becquerel	Bq	$s^{-1}$
dose absorbée	gray	Gy	$J.kg^{-1}$

FIGURE 1 – Tableau récapitulatif de différentes unités dérivées du SI.

## 2 Mesures, erreurs et incertitudes

### Définitions

Pour attribuer une représentation numérique à une grandeur physique il est nécessaire de procéder à une opération nommée *mesurage*. La grandeur mesurée s'appelle le *mesurande*, et l'instrument de mesure fournit une *valeur mesurée*.

### 2.1 Erreurs de mesure

Il est impossible d'avoir une valeur mesurée rigoureusement exacte : il y a toujours une erreur de mesure que l'on espère minime.

Pour fixer les idées, supposons que l'on essaie de déterminer expérimentalement la valeur de l'accélération de la pesanteur en salle de TP.

On peut noter dans ce cas  $g_t$  la *valeur de référence*, ou *valeur tabulée* la valeur connue que l'on cherche à mesurer, et  $g$  la valeur mesurée qui sera plus ou moins éloignée de  $g_t$ , et le but est de parvenir à décider si la valeur mesurée est "cohérente".

Il existe deux sources différentes d'erreurs de mesure qui peuvent expliquer cet écart, les erreurs systématiques et les erreurs aléatoires.

Par exemple si on prend un tireur à la carabine, et que l'on regarde les impacts de 10 de ses tirs, on va remarquer qu'il ne sont pas tous au même endroit, il s'agit d'erreur aléatoire. Mais si en plus la carabine est mal réglée, on va aussi remarquer que par exemple, tous les tirs sont au dessus du centre la cible, il s'agit d'une erreur systématique.

Enfin si on imagine deux tireurs avec une même carabine bien réglée, un champion olympique et l'un d'entre vous, on va remarquer que le champion va avoir ses tirs bien plus regroupés que le débutant : l'erreur dans son cas est bien plus petite.

#### 2.1.1 Erreurs systématiques

Les erreurs systématiques sont dures à repérer dans les cas où on ne connaît pas de valeur de référence. De plus, contrairement aux erreurs aléatoires, elles ne changent pas si on refait un mesurage.

Il y a deux types d'erreurs systématiques, celles dues aux instruments de mesure et au protocole de mesurage et celles dues au choix du modèle théorique. Par exemple, si on veut mesurer la période d'un pendule pour ensuite avoir l'accélération de la pesanteur :

- le fabricant ne peut garantir que le chronomètre a une précision infinie ;
- il a pu tomber, s'abîmer, etc ;
- il a été calibré à une température donnée qui n'est pas nécessairement celle lors de la mesure ; ...

Dans le dernier cas, on parle de *grandeur d'influence* : il s'agit d'un paramètre (ici la température) qui a une influence sur l'instrument de mesure sans en avoir sur la grandeur mesurée. Il s'agit la plupart du temps de la température ou de la fréquence d'échantillonnage des appareils de mesure numériques. Il est donc nécessaire de connaître le principe de fonctionnement des appareils de mesure utilisés pour pouvoir prendre en compte ces grandeurs d'influence.

Une erreur due au protocole dans cette expérience pourrait être de faire les mesures "à l'œil" et donc de ne pas prendre en compte le temps de réaction entre le moment où le pendule passe le repère et le moment où le chronomètre est effectivement arrêté.

Un exemple d'erreur systématique dû au modèle théorique serait par exemple ici le fait que comme nous le verrons, l'expression permettant de trouver  $g$  à partir de la période  $g = 4\pi^2 L/T^2$  n'est qu'une approximation valable aux petits angles.

On suppose dorénavant que ces erreurs ont été corrigées ou minimisées lors de la réalisation du protocole, et on ne va plus parler que des erreurs aléatoires.

### 2.1.2 Erreurs aléatoires

On peut les détecter en effectuant plusieurs fois la mesure, mais on ne peut jamais les corriger exactement. Si on reprend l'exemple des deux tireurs à la carabine, dans un des deux cas, les erreurs sont plus grandes (pour le débutant, les tirs sont moins regroupés), mais même pour le champion, toutes les balles ne sont pas exactement au centre de la cible.

A nouveau, on pourrait imaginer un dispositif électronique de mesure de la période du pendule, qui donne pour résultat de mesure  $T_1 = 1003$  ms. En parallèle, un deuxième dispositif, identique donne  $T_2 = 1005$  ms, puis un troisième  $T_3 = 1000$  ms...

Pour présenter tous ces résultats, plutôt qu'un tableau, un histogramme est particulièrement bien adapté.

On pourrait ainsi obtenir (avec beaucoup de patience et de matériel) les histogrammes de la figure 2 :

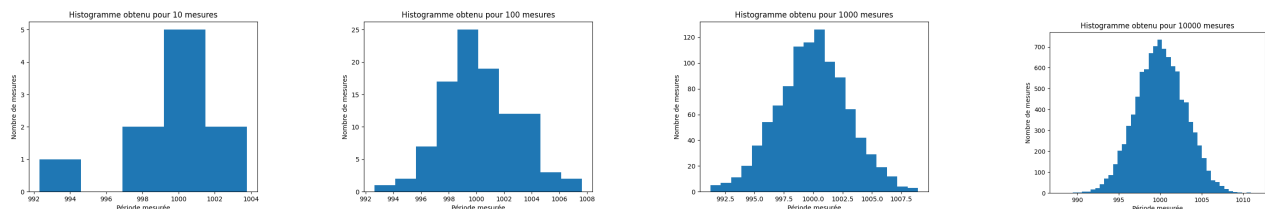


FIGURE 2 – Différents histogrammes simulés de la mesure répétée de la période d'un pendule.

On voit ainsi que les histogrammes se rapprochent quand on augmente le nombre de mesures vers une courbe en cloche (appelée "gaussienne"). Cette convergence est une conséquence du théorème central limite dans le sens où l'écart global est obtenu en sommant toutes les sources d'incertitudes possibles indépendantes, et qu'il est bien plus probable qu'elles se compensent entre elles plutôt que de toutes contribuer dans le même sens.

Une loi gaussienne est caractérisée par sa valeur moyenne (la valeur pour laquelle est obtenu le "pic") et son écart-type (qui mesure la "largeur" du pic). Par exemple, la loi gaussienne pour une moyenne  $m$  et un écart-type  $\sigma$  est donnée par  $f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$  et les histogrammes précédents ont été obtenus pour une moyenne de 1000 ms et un écart-type de 3 ms.

La répartition gaussienne des résultats nous indique que si on utilisait un dispositif de mesure de plus, il y aurait 68% de probabilité que la mesure qu'il donne soit à moins de  $\sigma$  de  $m$ , 95% pour être à moins de  $2\sigma$ , 99 % à moins de  $3\sigma$ , etc

| A cause de ces deux types d'erreurs, on n'est jamais certain du résultat d'un mesurage.



## 2.2 Incertitudes

La seule chose exacte que l'on peut faire après un mesurage, c'est dire que l'on estime que la valeur cible (celle du mesurande) doit être comprise entre deux valeurs, avec une probabilité donnée. On donne donc la meilleure estimation possible de la valeur mesurée  $x$  et l'incertitude associée  $u(x)$ . Il y a deux manières de procéder pour évaluer l'incertitude, que l'on utilisera lors des futurs TP.

### 2.2.1 Incertitudes de type A

Si on a la possibilité de faire plusieurs mesures  $\{x_i\}$  de la même grandeur, on prend la moyenne des mesures comme valeur mesurée  $x = \langle x \rangle$ , et comme incertitude-type l'écart-type divisé par  $\sqrt{N}$  :  $u(x) = \sqrt{\sum_i (x - x_i)^2 / N} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i (x - x_i)^2} = \frac{\langle (x_i - \langle x \rangle)^2 \rangle}{\sqrt{N}}$ . Plutôt que d'utiliser cette formule, il est plus rapide d'utiliser un outil de traitement statistique (calculatrice, python, regressi, etc).

On est alors en train de réaliser exactement l'expérience imaginée précédemment, et on essaie de trouver les paramètres qui décrivent la loi gaussienne. Toutefois, lorsque l'on fait plusieurs mesures, il est à nouveau plus probable que les erreurs commises à chaque mesure se répartissent de part et d'autre de la moyenne et se compensent, c'est pourquoi l'écart-type est divisé par  $\sqrt{N}$  pour obtenir l'incertitude-type. On pourrait alors imaginer multiplier les mesures afin de minimiser l'incertitude, mais à cause de la racine carrée dans l'expression, c'est un procédé très lent : il faut 100 fois plus de mesures pour diviser l'incertitude par 10 !

### 2.2.2 Incertitudes de type B

Si on ne peut pas faire de traitement statistique, on prend la valeur mesurée comme estimation de la valeur vraie, et pour déterminer l'incertitude-type on a besoin de connaître la précision de la mesure :

- pour un instrument gradué de graduation  $\Delta$ , on prend une demi-graduation comme précision. Par exemple pour un double-décimètre gradué en mm, la précision est  $p = 0,5$  mm (on peut se convaincre que l'on voit bien quelle graduation est la plus proche) ;
- pour un appareil de mesure, il suffit de se référer à la notice. Par exemple, un chronomètre mesurant 1,02 s avec comme indication dans la notice  $p = 0,3\% R + 3 DG$  a une incertitude-type associée  $u(T) = 0,003 * 1,02 + 3 * 0,01 = 0,03306$  s ( $R$  correspond à la valeur lue *read* et  $DG$  au dernier chiffre *digit*).

Il est aussi possible que la précision de la mesure soit limitée par la définition de ce que l'on souhaite mesurer, par exemple une tache lumineuse lors d'une expérience de diffraction dont les bords ne sont pas bien nets, la distance entre une lentille et un écran lors d'une mise au point, etc. Dans ce cas on prend comme précision la différence entre la valeur la plus grande et la valeur la plus petite divisée par 2.

Comme une seule mesure est effectuée, la seule hypothèse que l'on peut raisonnablement effectuer sur ce qui se passerait en cas d'expériences répétées est que toutes les valeurs dans l'intervalle de précision ont la même probabilité d'arriver. Le calcul de l'écart-type donnerait alors une incertitude-type  $u(x) = p/\sqrt{3}$ , ce sera donc la valeur que nous adopterons pour l'incertitude-type.

### 2.2.3 Autres incertitudes

On définit aussi des incertitudes élargies, en prenant  $U(x) = ku(x)$  avec  $k > 1$  pour augmenter la probabilité d'avoir la valeur cible dans l'intervalle considéré.

On utilise aussi des incertitudes relatives  $u(x)/x$ . L'incertitude sur un résultat s'exprime dans la même unité que la grandeur mesurée. L'incertitude relative est sans unité, elle s'exprime en pourcentage.

## 3 Présentation d'un résultat

Le résultat d'une mesure doit être présenté sous la forme  $x = \dots \quad u(x) = \dots$ . Par exemple, si je me mesure avec une toise graduée en cm, et que je lis être exactement entre les graduations 174 et 175 ma taille est :

$$h = 1,745 \text{ m} \quad u(h) = 0,003 \text{ m}$$

Dans le cas où une incertitude élargie a été utilisée, on donne alors aussi le pourcentage de confiance associé, par exemple :

$$h = 1,745 \text{ m} \quad U(h) = 0,006 \text{ m} \quad \text{à } 95 \% \text{ de confiance}$$

**Le guide d'usage (GUM) du bureau international des poids et mesures déconseille fortement l'utilisation de  $h \pm u(h)$  car on sait pas si ce qui suit le signe  $\pm$  correspond à une précision, à une incertitude-type ou à une incertitude élargie, et donc si la probabilité d'être à l'extérieur du domaine doit être considérée comme négligeable ou pas.**

## 3.1 Chiffres significatifs

Dans ce résultat, on ne présente que les chiffres dont on est "surs". Ici, il y en a 4, puisqu'à cause de l'incertitude, il serait idiot d'écrire pour ma taille  $h = 1,743938 \text{ m}$   $u(h) = 0,003 \text{ m}$ .

### Définitions

Les chiffres significatifs sont tous les chiffres qui apparaissent, à l'exception des zéros situés à la gauche du nombre.

Exemples.

L'avantage de la notation scientifique est qu'elle permet de bien compter les CS.

## 3.2 Règles d'utilisation

### 3.2.1 Chiffres significatifs

- Addition ou soustraction : on conserve la précision la plus large. Ex :  $324 \text{ m} + 1,75 \text{ m} = 326 \text{ m}$ .
- Autres opérations : le résultat doit avoir autant de CS que le nombre utilisé qui en a le moins. Ex :  $3,56 \times 2 = 7$
- Dans les exercices, souvent le même nombre de CS pour tous les nombres. Il faut le repérer et l'utiliser.
- La plupart du temps, l'incertitude ne s'exprime qu'avec deux CS, en arrondissant à la valeur supérieure (sauf si "aberrant" comme pour  $u(X) = 2,702$ ) ou si peu nécessaire (comme pour  $u(Y) = 0,7932$ ).
- Il faut accorder le nombre de CS du résultat à celui de l'incertitude. Ex :  $h = 1,743938 \text{ m}$   $u(h) = 0,014 \text{ m}$  devient  $h = 1,744 \text{ m}$   $u(h) = 0,014 \text{ m}$ .

### 3.2.2 z-score

Pour une grandeur mesurée expérimentalement, on dispose donc d'une meilleure estimation de la valeur à mesurer  $a$  et de l'incertitude-type associée  $u(a)$ . En l'absence d'erreur systématique, et si les erreurs sont vraiment aléatoires, alors la probabilité que la valeur cible soit entre  $a - u(a)$  et  $a + u(a)$  est d'environ 68 % et elle passe à 95 % pour l'intervalle entre  $a - 2u(a)$  et  $a + 2u(a)$  (puis 99 % pour  $3u(a)$  etc).

Si on dispose d'une valeur de référence de cette grandeur on peut alors vouloir vérifier que le résultat de mesure est compatible avec cette valeur tabulée  $a_{ref}$ . On calcule alors *écart normalisé* (aussi appelé z-score) :  $z = \frac{|a - a_{ref}|}{u(a)}$ . On peut alors distinguer 2 cas :

- si  $z$  est grand (plus grand que 3 par exemple), alors l'écart entre la valeur mesurée et la valeur de référence est plus grand que 3 incertitudes-types, donc il est peu probable que des erreurs aléatoires expliquent cet écart (la probabilité que ce soit le cas est plus petite que 1%), donc il y a sûrement un problème (modèle théorique pas vérifié, protocole expérimental pas adapté,...) : la valeur mesurée n'est pas compatible avec la valeur de référence ;
- si  $z$  est petit (inférieur à 1, voire 2 à la rigueur), alors on ne peut pas conclure qu'il y a désaccord entre la théorie et l'expérience.

On peut aussi vérifier la compatibilité de deux mesures différentes de la même grandeur de la même manière. Par exemple pour un protocole donnant  $a_1$  avec son incertitude-type  $u(a_1)$  et un deuxième protocole donnant  $a_2$  avec une incertitude-type  $u(a_2)$ , alors le z-score se calcule comme  $z = \frac{|a_1 - a_2|}{\sqrt{u(a_1)^2 + u(a_2)^2}}$  et les 2 expériences sont compatibles entre elles si ce z-score est petit.



Par exemple, le sujet de Centrale-Supelec 2022 en PC comparait une vitesse obtenue dans une descente en vélo avec un casque classique  $v_c$  et avec un casque profilé  $v_p$ . Les valeurs obtenues expérimentalement étaient  $v_c = 18,5$  m/s avec une incertitude-type associée  $u(v_c) = 0,1$  m/s et pour le casque profilé  $v_p = 19,25$  m/s et  $u(v_p) = 0,13$  m/s.

Le calcul du  $z$ -score donne  $z = \frac{v_p - v_c}{\sqrt{u(v_c)^2 + u(v_p)^2}} \simeq 4,6$ , il est donc très peu probable que la vitesse avec le casque classique soit plus grande qu'avec le casque profilé, il vaut donc mieux utiliser le casque profilé.

Une manière plus visuelle d'interpréter le  $z$ -score consiste à simuler un grand nombre de valeurs aléatoires pour chaque grandeur qui suivent une loi gaussienne où la valeur moyenne est la meilleure estimation de la grandeur obtenue par l'expérience et l'écart-type son incertitude-type. On peut alors ainsi un histogramme, et en faisant ce travail pour 2 valeurs, on peut distinguer les cas où les valeurs sont compatibles quand les histogrammes se superposent en grande partie (ce qui correspond à un  $z$ -score petit) aux cas où les valeurs sont différentes quand les histogrammes sont disjoints ( $z$ -score élevé).

Dans le cas du sujet de Centrale, les histogrammes obtenus pour 10 000 valeurs simulées de chaque vitesse sont disjoints, il y a donc une réelle augmentation de la vitesse due au casque (la probabilité que la vitesse avec casque classique soit plus grande qu'avec le casque profilé est très petite).

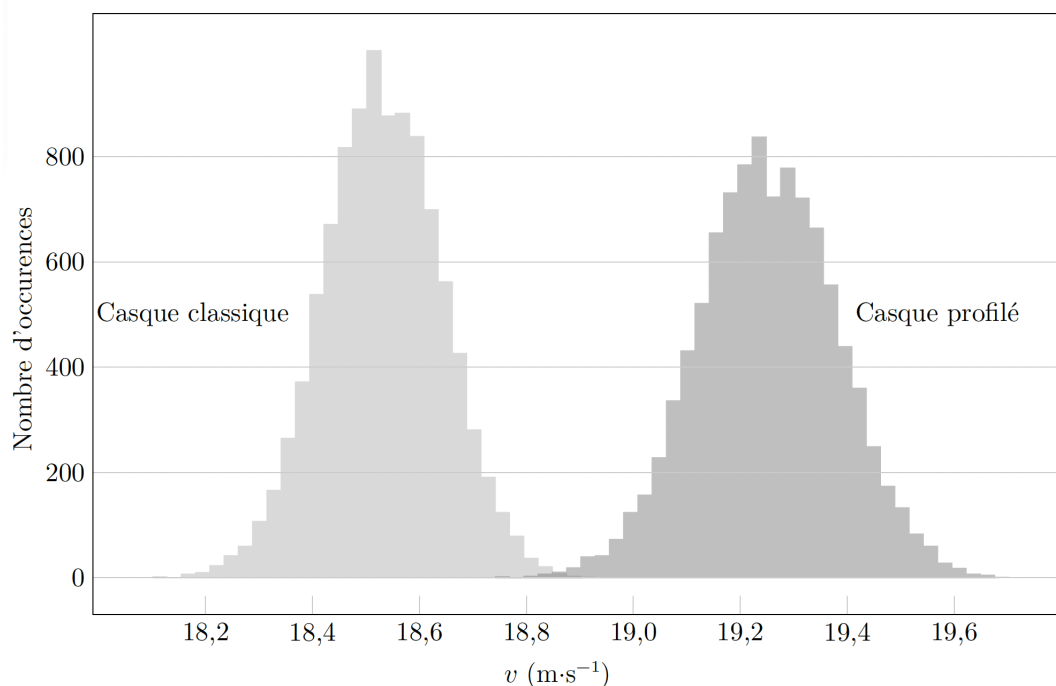


FIGURE 3 – Histogrammes des valeurs simulées des vitesses. (Source : Concours Centrale-Supelec Physique 1 PC 2023)

### 3.2.3 Propagation des incertitudes

Lors d'un calcul effectué à partir de grandeurs mesurées expérimentalement indépendantes, on doit aussi faire un calcul pour obtenir l'incertitude associée : on parle d'incertitudes composées ou de propagation des incertitudes. Il y a deux règles à retenir :

- Addition ou soustraction :  $g = a + b + c + \dots$  On procède à une somme quadratique des incertitudes :  $u(g) = \sqrt{u(a)^2 + u(b)^2 + u(c)^2 + \dots}$
- Produit ou quotient :  $g = a \times b / c$  . Ce sont les incertitudes relatives qui se somment de manière quadratique (unités !) :  $\frac{u(g)}{g} = \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2 + \left(\frac{u(c)}{c}\right)^2}$

On voit dans ces deux expressions que la source principale d'incertitude va "écraser" les autres à cause de la puissance 2 (une incertitude 10 fois plus grande a un poids 100 fois plus grand dans le calcul), c'est pourquoi il est primordial lors de la discussion de vos résultats d'essayer d'identifier quelle est la source principale d'incertitude (et éventuellement de proposer ou mettre en œuvre une méthode permettant de la diminuer, avant de s'intéresser aux autres).

Dans le cas de calculs plus compliqués, il est procédé à une *simulation Monte-Carlo* : prenons l'exemple d'une grandeur  $h$  qui dépend de manière quelconque de deux grandeurs  $a$  et  $b$  en suivant une loi  $h = f(a, b)$ , par exemple la



valeur de l'accélération de la pesanteur obtenue à partir de la mesure de la période  $T$  et de la longueur d'un pendule simple  $L$  selon  $g = 4\pi^2 L/T^2$  (la formule dans le cas d'un produit ne peut pas s'adapter directement à cause de la puissance pour  $T^2$  que l'on ne peut pas considérer comme le produit de  $T$  avec lui-même car ce ne sont plus des grandeurs indépendantes). Les grandeurs  $T$  et  $L$  ont été mesurées et sont connues avec leurs incertitudes-types  $u(T)$  et  $u(L)$ . La première étape est de tirer un grand nombre  $N$  de valeurs  $T_i$  et  $L_i$  qui suivent deux lois gaussiennes de moyenne  $T$  et  $L$  et d'écart-type  $u(T)$  et  $u(L)$ . On calcule alors les  $N$  valeurs de  $g$  correspondantes  $g_i = 4\pi^2 L_i/T_i^2$ , et on procède alors comme dans le cas d'incertitude de type A : on prend la moyenne des  $g_i$  comme meilleure estimation de la valeur de  $g$ , et l'incertitude-type sur  $g$  est déterminée par l'écart-type. Toutefois on ne divise pas par  $\sqrt{N}$ , les  $N$  simulations n'étant pas une représentation d'erreurs aléatoires qui se compensent, mais une représentation des différentes valeurs possibles respectant les incertitudes sur les grandeurs de départ (on comprend bien qu'on ne peut pas augmenter la précision sur la mesure de  $g$  seulement en effectuant plus de simulations à partir des mêmes mesures de départ).

Voici par exemple un exemple de script python permettant de faire cette opération.

```
1 # Importation des bibliothèques permettant de faire les calculs
2 import numpy as np
3 import numpy.random as rd
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 # Entrée des données du problème
6 L = #longueur du pendule en m
7 T = #période du pendule en s
8 u_m = # incertitude sur L en m
9 u_T = # incertitude sur T en s
10 # Simulation de N = 10000 Tirages par la méthode Monte-Carlo
11 N = 10000 # nombre de tirages à réaliser
12 L_sim = rd.normal(L,u_L, N) # simulation de N valeurs de longueurs autour de L avec ecart type u_L
13 T_sim = rd.normal(T,u_T, N) # simulation des valeurs de T
14 # Expression de g
15 g_sim = 4*np.pi**2*L/T**2
16 ## Analyse statistique des résultats de la simulation MC
17 g_moy = np.average(g_sim) # Calcul de la valeur moyenne de g
18 u_g= np.std(g_sim,ddof=1) # Ecart-type de g
19 print (g_moy,u_g) #affichage des résultats
```

## Le plus important

Il ne faut pas perdre de vue que ces méthodes ne doivent pas vous dispenser de faire preuve de bon sens, ce qui va de pair avec une utilisation courante de l'outil.

Par exemple, les chiffres significatifs sont une manière très simplifiée de prendre en compte les incertitudes, un résultat à 3 chiffres significatifs indique une incertitude relative entre 1 % et 0,1 %, c'est pourquoi lors de la plupart des calculs, le nombre de CS ne peut pas augmenter. C'est aussi pourquoi les correcteurs se crispent très fort si un résultat est donné avec une demi-dizaine de CS.

De même, il n'est pas tout le temps pertinent de donner 2 CS à l'incertitude-type : une mesure au mètre gradué en cm est supposé avoir une incertitude-type de 2,8 mm, mais dans ce cas, on ne peut pas quand même pas exprimer la meilleure estimation d'une mesure unique au dixième de mm ! De même avec des incertitudes dont le premier CS est loin de 1, il est possible d'arrondir à l'excès sans perte significative vu qu'il s'agit d'une estimation de la qualité de la mesure (à ce niveau 0,78 et 0,8 apporte autant d'information).

De même, pour la propagation des incertitudes, dans les cas simples (addition, soustraction, produit, quotient) les simulations Monte Carlo donnent les mêmes résultats que les formules présentées, il n'est donc pas nécessaire de mettre en œuvre une telle procédure chronophage.

Il existe des physiciens dont le travail consiste à faire des mesures les plus précises possibles, par exemple en métrologie ou en physique des particules et où il est courant d'utiliser des incertitudes élargies à plus de  $5\sigma$  (afin d'avoir de très grands intervalles de confiance, par exemple pour justifier que le signal mesuré correspond bien à une nouvelle particule et pas à un déclenchement aléatoire des capteurs), ainsi que de donner des incertitudes avec plus de CS (ainsi que des incertitudes sur les incertitudes). Ce n'est pas ce qui vous est demandé en CPGE !

## 4 Validation d'un modèle expérimental

## 4.1 Principe de la régression linéaire

Dans le cas où l'on souhaite vérifier la validité d'une loi où deux grandeurs sont proportionnelles, il est facile de savoir si les grandeurs mesurées sont compatibles avec le modèle. Par exemple, pour un TP où l'on souhaite vérifier la loi d'Ohm, il suffit de mesurer plusieurs valeurs de la tension  $U$  aux bornes d'une résistance  $R$  en faisant varier le courant  $i$  qui la traverse. On obtient ainsi  $N$  couples de valeurs  $(U_k, i_k)$  qui sont sensés vérifier la loi  $U_k = Ri_k$ .

On place alors ces  $N$  points sur un graphe, en mettant les tensions en ordonnées et les courants en abscisse. A chaque point on associe aussi les incertitudes de mesure associée sous forme de "bâtons", les points ressemblent alors à des croix dont les branches ont une longueur dépendant des incertitudes.

Le modèle est alors validé s'il est possible de faire passer une droite par toutes les croix.

Dans le cas de loi plus compliquées, les grandeurs à placer en abscisse et ordonnées doivent être 2 grandeurs calculées à partir de chaque paramètre qui sont sensées être proportionnelles. Par exemple, pour des pendules simples dont on mesure longueurs  $L_k$  et périodes  $T_k$ , on peut placer en abscisse  $L$  et en ordonnée  $T^2$ , ou bien placer  $\sqrt{L}$  en abscisse et  $T$  en ordonnée.

## 4.2 Validation de la régression linéaire

La première étape avant d'exploiter une régression linéaire est de vérifier si elle est bien compatible avec le modèle à vérifier. Pour être compatible il faut que :

- évidemment les points semblent bien alignés ;
- les points soient répartis de part et d'autre de la droite de manière aléatoire.

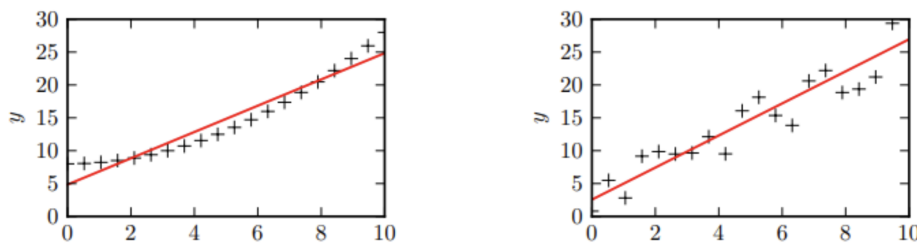


FIGURE 4 – Deux régressions linéaires : celle de gauche n'est pas compatible avec le modèle, celle de droite si.

Si ces deux conditions sont remplies, on peut alors se concentrer sur le traitement des incertitudes : dans le cas idéal, les barres d'incertitude sur les mesures permettent de faire passer une droite par les croix. Si les incertitudes ont été sous-estimées, alors beaucoup de croix sont trop loin de la droite, et si elles sont sur-estimées, les barres dépassent largement de chaque côté de la droite, et il est alors possible de faire passer des droites trop différentes par tous les points. Dans les deux cas, la régression linéaire ainsi effectuée ne peut pas être proprement exploitée, et il faudrait refaire des mesures en améliorant le protocole (erreurs surestimées) ou refaire l'étude des incertitudes plus en détail (une source d'erreur d'incertitude a été oubliée ou négligée à tort).

Enfin, certains outils (*regressi* par exemple) fournissent un coefficient de corrélation  $r$  ou un coefficient appelé  $\chi_2$  ou  $\chi_2$  réduit. Normalement, cette valeur doit se rapprocher de 1 si le modèle est vérifié. On remarque toutefois que cette grandeur utilisée toute seule n'est pas suffisante pour juger de la pertinence du modèle sur les différentes figures de la fig. 5

## 4.3 Exploitation de la régression linéaire

Une régression linéaire est exploitable de deux manières différentes :

- on peut s'en servir pour valider ou rejeter un modèle théorique ;
- on peut s'en servir pour déterminer un paramètre du modèle.

Par exemple, en plaçant les points  $(U_k, i_k)$  mesurés pour l'expérience de la loi d'Ohm, on obtient bien une droite du type  $y = ax + b$  avec  $a$  et  $b$  fournis par le programme utilisé avec leurs incertitudes-type. On peut alors vérifier que 0 est une valeur acceptable pour l'ordonnée à l'origine (en calculant l'écart normalisé  $z = b/u(b)$ , ce qui permet de vérifier le modèle. Puis si 0 est bien une valeur acceptable, associer la valeur de la résistance à la pente  $a$  de la droite (et son incertitude-type).

Exercice : la relation de conjugaison de Descartes pour une lentille de longueur focale  $f'$  lie les positions d'un objet et de son image à travers la lentille selon  $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$  où  $OA$  (respectivement  $OA'$ ) est la distance algébrique entre

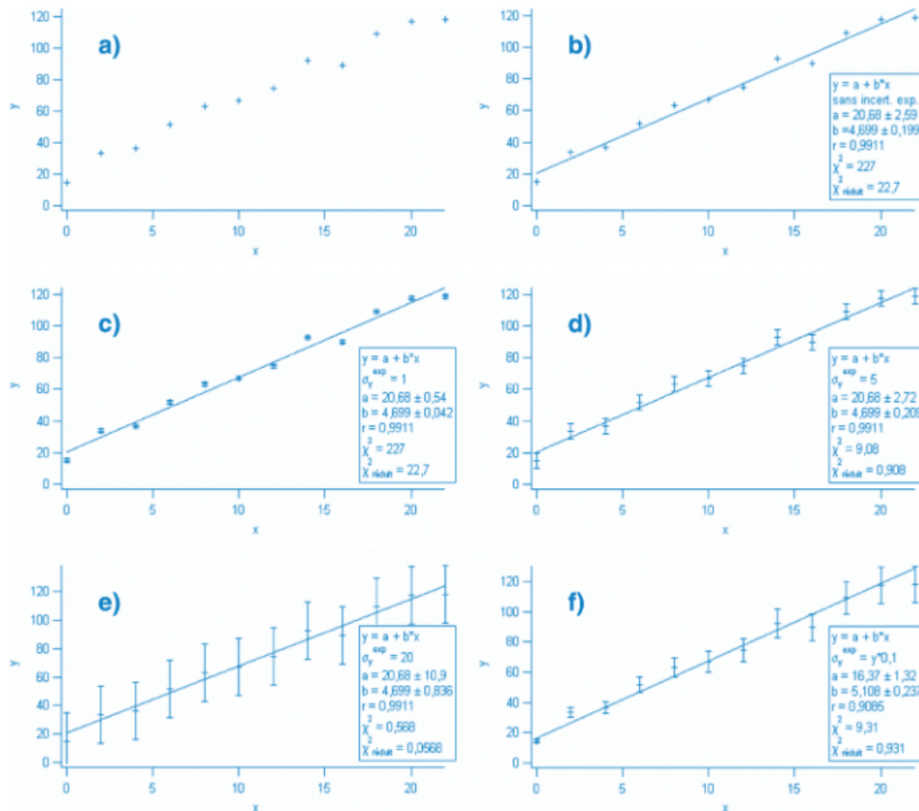


FIGURE 5 – Différentes régressions linéaires.

la letille et l'objet (resp. l'image). Décrire comment exploiter un ensemble de mesures des positions de l'objet et de son image afin de déterminer la longueur focale de la lentille.

Exercice 2 : De même pour la mesure de l'accélération de la pesanteur grâce à des mesures de période de pendules simples de différentes longueurs.