Physique-Chimie : Corrigé DS 1
1 octobre 2021

1 Manipulation de grandeurs.

1A Chiffres significatifs

1A. 1. Donnez le résultat des calculs suivants en expliquant les règles de calcul que vous utilisez.
a) 3,47 m + 4,5 m = 9,0 m
b) 4,5 m x 2,00 m = 9,0 m^2
c) sin (4,2 m / 20 cm) = sin(21) = 0,84
d) 43 x 10^{-4} s + 112 ms = 116 ms

1B Incertitudes

1B. 1. On souhaite déterminer la force exercée par un ressort $F = kx$ où k est la constante de raideur du ressort et x son allongement (la différence entre sa longueur quand la force s'exerce et sa longueur à vide).

1B. 1. a. k s'exprime en N/m.

1B. 1. b. Puisque 1 N = 1 kg.m.s^{-2}, on trouve que $[k]$ = kg.s^{-2}.

1B. 1. c. On trouve $u(l_0) = \frac{1 \text{ cm}}{\sqrt{3}} = 0,6$ cm.

1B. 1. d. $l_0 = 43,0$ cm avec $u(l_0) = 0,6$ cm.

1B. 1. e. $l_1 = 56,0$ cm avec $u(l_1) = 0,6$ cm.

1B. 1. f. $x = l_1 - l_0 = 13,0$ cm et $u(x) = \sqrt{u(l_0)^2 + u(l_1)^2} = 0,8$ cm.

1B. 1. g. On a alors $F = kx$, donc $F = 1,3$ N et $\frac{u(F)}{F} = \sqrt{\left(\frac{u(F)}{F}\right)^2 + \left(\frac{u(F)}{F}\right)^2}$, donc $u(F) = F\sqrt{\left(\frac{u(F)}{F}\right)^2 + \left(\frac{u(F)}{F}\right)^2} = 0,1$ N.

2 Atomes, trous noirs et univers

2A A propos des atomes

2A. 1. $[G] = \frac{[F][r^2]}{[m][M]} = \frac{\text{N.m}^2}{\text{kg}^2} = \frac{\text{kg.m}^3.\text{s}^{-2}}{\text{kg}^2} = \text{kg}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}$. De même $[\epsilon_0] = \frac{[q][Q]}{[4\pi][r^2][F_e]} = \frac{\text{C}^2}{1.\text{m}^2\text{kg.m.s}^{-2}} = \text{A}^2.\text{kg}^{-1}.\text{m}^{-3}.\text{s}^4$.

2A. 2. On a alors $[e^2] = [F_e r^2] = \text{kg.m}^3.\text{s}^{-2}$.

2A. 3. On a alors :

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{G\frac{mM}{r^2}}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r^2}} = \frac{4\pi G\epsilon_0 m_p m_e}{q_e^2}.$$

On trouve en faisant l'application numérique on trouve :

$$\frac{F_g}{F_e} \simeq 4,41.10^{-40}.$$

Les effets gravitationnels correspondent donc à une force qui est $10^4 0$ fois plus petite que la force électromagnétique, ils sont donc négligeables (on ne pourrait voir un effet uniquement si les données étaient écrites avec 40 chiffres significatifs, ce qui n'est clairement pas le cas).

2A. 4.

$$[\hbar] = \text{kg.m}^2.\text{s}^{-2}.s = \text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$$

2A. 5.

2A. 6. On peut voir directement que la formule $v = \frac{e^2}{\hbar}$ est homogène (mais on peut utiliser la méthode du monôme en cherchant v sous la forme $(e^2)^\alpha \hbar^\beta$ et on trouve $\alpha = 1$ et $\beta = -1$). On trouve une vitesse $v = 2,19.10^6$ m/s, ce qui est une valeur considérable, de l'ordre de 1 % de celle de la lumière dans le vide. A ces vitesses, il faudrait prendre en compte les effets relativistes !

2A. 7.

2A. 8. On peut voir directement que la formule $r = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}$ est homogène (mais on peut utiliser la méthode du monôme en cherchant r sous la forme $(e^2)^\alpha \hbar^\beta m_e^\gamma$ et on trouve $\alpha = -1$, $\beta = 1$ et $\gamma = -1$). On trouve une vitesse $r = 5,26.10^{-11}$ m, ce qui est une valeur très facilement acceptable puisque du bon ordre de grandeur, les atomes ayant une taille de l'ordre de la centaine de picomètre, donc de l'ordre de 10^{-10} m

2A. 9.

2A. 10. En appelant M la masse de l'atome d'hydrogène, on a $M = m_p + m_e \simeq m_p$ puisque la masse de l'électron (environ 2000 fois plus petite que celle du proton) est alors négligeable. Le volume occupé par l'atome est lui de l'ordre de r^3 (et vaut même $\frac{4}{3}\pi r^3$ pour une sphère de rayon r). On trouve donc une masse volumique de l'ordre de :

$$\rho = \frac{m_p}{r^3} = \frac{m_p m_e^3 e^6}{\hbar^6} \simeq 11,5.10^3 \text{kg.m}^{-3}.$$

C'est une masse volumique comparable à celle de la matière ordinaire sous forme liquide ou solide (par exemple l'eau liquide a une masse volumique de l'ordre de 10^3 kg/m^3 et les métaux de l'ordre de 10^4 kg/m^3). On trouve un résultat encore plus proche si on prend en compte le facteur $\frac{4}{3}\pi$, on en déduit donc que dans la matière sous forme solide ou liquide, les atomes sont quasiment tous en contact les uns avec les autres.

2B Les trous noirs

.

2B. 1. On cherche $R_s = G^\alpha c^\beta M^\gamma$ avec $[G] = \text{N.m}^2.\text{kg}^{-2} = \text{kg}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}$, $[c] = \text{m.s}^{-1}$ et $[M] =$ kg. On trouve donc comme système d'équations $-\alpha+\gamma = 0$ pour les kilogrammes, $3\alpha+\beta = 1$ pour les mètres et $-2\alpha - \beta = 0$ pour les secondes. On trouve alors $\alpha = 1$, $\beta = -2$ et $M = 1$, donc $R_s = \frac{GM}{c^2}$.

2B. 2. La masse volumique d'un trou noir est obtenue par la relation $\rho_{TN} = \frac{M}{R^3} \geqslant \frac{M}{R_S^3}$ puisque $R_s \geqslant R$.

On a donc $\rho_{TN,min} = \frac{M}{\left(\frac{GM}{c^2}\right)^3} = \frac{c^6}{G^3 M^2}$.

On montre ainsi que plus un trou noir est massif, moins il est dense !

2B. 3. La masse volumique d'une étoile à neutron est donc donnée par $\rho_{e.n} = \frac{m_n}{r_n^3} = 10^{15}\frac{m_n}{r_a} \simeq 10^{15}\frac{m_p m_e^3 e^6}{\hbar^6}$.

Un trou noir de masse M peut exister si sa masse volumique est plus faible que celle d'une étoile à neutron, donc il faut que $\rho_{TN,min} = \frac{c^6}{G^3 M^2} \leqslant \rho_{e.n}$, donc on veut $M \geqslant \sqrt{\frac{c^6}{G^3} 10^{-15} \frac{\hbar^6}{m_p m_e^3 e^6}} \simeq 10^{-15/2} \frac{c^3 \hbar^3}{G^{3/2} m_p^{1/2} m_e^{3/2} e^3}$.

On trouve donc $M \geqslant 14,4.10^{30} kg$, donc la masse minimale d'un trou noir stellaire est en suivant ce raisonnement d'environ 7 masses solaires.

2C L'univers observable

.

2C. 1. Une année-lumière correspond à la distance parcourue par la lumière dans le vide en une année, il faut donc utiliser la formule $d = c \times t$ avec t la durée d'une année. En l'exprimant en secondes on trouve $t = 365,25 \times 24 \times 60 \times 60 = 3,1558.10^7$ s (il y a en moyenne 365,25 jours par an comme on peut le voir en prenant en compte les années bissextiles). On trouve alors 1 al $= 9,47.10^{15}$ m. On a alors $1Mpc = 3,27.10^6$ al $= 3,10.10^{22}$ m

2C. 2. En mettant H_0 en unité de base du SI, on remarque que $[H_0] = \text{m.s}^{-1}.\text{m}^{-1} = \text{s}^{-1}$, on aura donc $T_u = \frac{1}{H_0}$.
Maintenant, tout le problème est d'exprimer H_0 en s^{-1}, et pour ceci, il faut utiliser la conversion précédente :

$$H_0 = 72 \frac{10^3\text{m}}{3,10.10^{22}\text{m}} \text{s}^{-1} = 2,33.10^{-18}\ \text{s}^{-1}.$$

On obtient alors :

$$T_u = \frac{1}{H_0} \simeq 4,29.10^{17}\ \text{s} = 13,6.10^9 \text{années}.$$

2C. 3. Une galaxie situé à R_U de nous s'éloigne à une vitesse $v = H_0 R_U$ qui doit être égale à celle de la vitesse de la lumière dans e vide donc $v = c$. On en déduit $R_U = \frac{c}{H_0} = cT_u$, donc le rayon de l'univers observable est de 13,6 milliards d'années-lumière.

2C. 4. On a vu dans la partie précédente que $[G] = \text{kg}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}$ et $[H_0] = \text{s}^{-1}$, donc on trouve la formule homogène $\rho_U = \frac{H_0^2}{G}$ (soit directement, soit en cherchant α et β tels que $\rho_U = H_0^\alpha G\beta$). L'application numérique donne $\rho_U \simeq 8,14.10^{-26}$ kg/m^3. C'est une valeur près de 10^{28} fois plus petite que la matière liquide ou solide sur Terre, et 10^{25} fois plus petite que celle de l'air, l'univers est donc bien quelque chose d'extrêmement peu dense.

2C. 5. La masse de l'univers observable est alors obtenue en multipliant la masse volumique trouvée à la question précédente par le volume de l'univers de l'ordre de R_U^3. On a donc :

$$M_U = \rho_U R_U^3 = \frac{H_0^2}{G} \left(\frac{c}{H_0} \right)^3 = \frac{c^3}{GH_0} \simeq 1,74.10^{53}\ \text{kg}.$$

Pour situer, la masse de la Terre est de l'ordre de 10^{24} kg, celle du Soleil de 10^{30} kg et celle de la voie lactée de l'ordre de 10^{42}. On peut donc estimer qu'il y autant de galaxies dans l'univers observable qu'il y a d'étoiles dans la voie lactée.

3 Fonctionnement d'un appareil photographique numérique.

3A Prise de vue

3A. 1. L'image de l'arbre situé en A à une distance de 25 m, donc tel que $\overline{OA} = -25$ m doit se former sur le capteur situé à une distance d de la lentille (donc $d = \overline{OA'}$). En appliquant la formule de conjugaison de Descartes, on obtient :

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \Longleftrightarrow d = \frac{f'\overline{OA}}{f' + \overline{OA}} \simeq 50\ \text{mm}.$$

On en déduit que l'image se forme (et donc que le capteur doit être) dans le plan focal image : l'arbre semble situé à l'infini pour la lentille (ce qui est comparable au fait que sa distance est très grande devant la longueur focale de la lentille).

3A. 2. Appelons C le point à la cime de l'arbre, B celui à sa base et A le point qui est situé à la même hauteur que l'appareil photographique. En appliquant la relation de conjugaison de Descartes pour le grandissement, on a $\gamma = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

Or on sait que $\overline{OA'} \simeq f'$ dans cette situation. On trouve donc $\overline{B'C'} \simeq \frac{\overline{BC} f'}{\overline{OA}} \simeq \frac{6{,}0 \times 0{,}050}{-25} = -12$ mm.

La taille de l'image de l'"arbre sur le capteur est donc de 12 mm, et pourrait donc répondre qu'il est entièrement visible. Il faut toutefois faire attention que l'image n'est pas centrée sur le capteur (il y a plus d'arbre au-dessus de l'appareil photographique qu'en dessous).

Toutefois $\overline{A'B'} \simeq -8,6$ mm qui est plus grand que la demi-hauteur du capteur : l'arbre est donc visible en entier.

3A. 3. Calculons la hauteur h et la largeur l d'un pixel du capteur.

Pour la hauteur, il y a 2912 pixels sur un hauteur de capteur de 23,9 mm, donc une taille $h \simeq \frac{23{,}9 \text{ mm}}{2912} \simeq 8,21\ \mu$m.

Pour la largeur, il y a 4368 pixels sur un hauteur de capteur de 35,8 mm, donc une taille $l \simeq \frac{35{,}8 \text{ mm}}{4368} \simeq 8,20\ \mu$m.

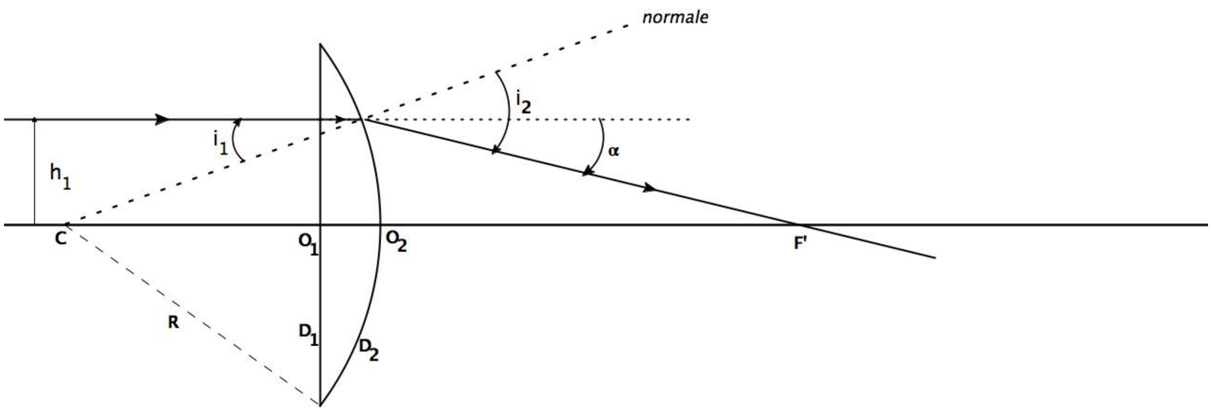
Puisque le grandissement transverse est $\gamma \simeq \frac{f'}{\overline{OA}} \simeq 2,0.10^{-3}$, un objet qui aura une image de la taille d'un pixel aura une hauteur $H = \frac{h}{\gamma} \simeq 4,1$ mm et une largeur $L \simeq 4,1$ mm aussi (les pixels sont carrés).

3A. 4. Son image a une taille $t = 20 \text{ cm} \times \gamma \simeq 0,4$ mm. Ceci correspond à 50 pixels.

3A. 5. Il faudrait changer la focale de l'objectif de l'appareil photographique, en en prenant une de longueur + 500 mm. En effet, on veut que $\overline{OA'}$ soit 10 fois plus grand, donc d'une valeur de 500 mm. On peut alors vérifier que l'on a toujours $\overline{OA'} \simeq f'$ puisque $OA \gg OA'$, donc on a bien besoin d'une focale de 500 mm. Dans ce cas, la distance entre la lentille et l'écran est de 500 mm , soit un demi-mètre : c'est un objectif très grand, qui va fortement déséquilibrer l'appareil photographique : il sera très difficile à manipuler.

3B Lentille mince convergente

3B. 1. La lentille doit être une lentille convergente, donc ses bords doivent être plus minces que son centre, ce ne serait pas possible si le centre du deuxième dioptre est situé après la lentille (on aurait alors une lentille divergente).



3B. 2.

Le rayon n'est pas dévié sur le dioptre D_1 car il arrive en incidence normale. Sur le dioptre D_2, il y aura réfraction, il faut donc tracer la normale au dioptre, c'est-à-dire le rayon du cercle passant par C et le point d'incidence. On mesure l'angle d'incidence $i_1 \simeq 21°$, et avec la loi de Snell-Descartes pour la réfraction $n \sin i_1 = \sin i_2$ (la lentille est située dans l'air d'indice 1), on trouve l'angle de réfraction $i_2 \simeq 32,5°$

3B. 3. Pour une lentille mince, la longueur focale est la distance $\overline{OF'}$, mais ici, on ne sait pas où est le point O à considérer. L'incertitude vient donc du fait que l'on ne sait pas où est situé le centre de la lentille O, juste qu'il est entre O_1 et O_2. En mesurant, on trouve $\overline{O_2F'} \simeq 60$ mm et $\overline{O_1F'} \simeq 68$ mm.

On déduit une longueur focale sur le schéma $f'_{mes} = 64$ mm avec $u(f'_{mes}) = 4$ mm.

3B. 4. On trouve $f'_{mes} = 64$ mm avec $u(f'_{mes}) = 4$ mm et on veut $f' = 50$ mm. Ceci correspond à une échelle $s = \frac{f'_{mes}}{f'} = 1,28$ et $u(s) = 0,08$. On mesure le rayon de courbure sur le schéma et on trouve $R_{mes} = 37$ mm, on en déduit la valeur du rayon de courbure que devrait avoir la lentille $R = \frac{R_{mes}}{s} = 29$ mm avec $u(R) = 2$ mm.

3B. 5. a. Le rayon lumineux arrive sur le dioptre D_1 en incidence normale (il est perpendiculaire au dioptre), donc il n'est pas dévié (on est dans le cas où l'angle d'incidence est nul, donc l'angle de réfraction aussi). Le rayon dans la lentille est donc toujours parallèle à l'axe optique et on a bien $h_2 = h_1$.

3B. 5. b. Considérons la réfraction du rayon lumineux sur le dioptre D_2, et appelons l'angle d'incidence i_1 et l'angle de réfraction i_2. Alors l'angle α recherché est $\alpha = i_2 - i_1$. On a de plus par construction trigonométrique que $\sin i_1 = \frac{h_1}{R}$ et par les lois de Snell-Descartes, $n_V \sin i_1 = n_a \sin i_2$ avec $n_V = n = 1,52$ l'indice optique du verre et $n_a = 1$ celui de l'air. On obtient donc :

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{nh_1}{R}\right) - \arcsin\left(\frac{h_1}{R}\right).$$

3B. 5. c. Il s'agit de ne garder que des rayons tels que h_1 soit petit, et α petit, donc des rayons proches de l'axe et peu inclinés : il s'agit des conditions de Gauss.

3B. 5. d. On a alors $i_1 \simeq \frac{h_1}{R}$ et $i_2 \simeq \frac{nh_1}{R}$, donc $\alpha = (n-1)\frac{h_1}{R}$. Par trigonométrie on obtient alors $\alpha \simeq \tan\alpha \simeq \frac{h_1}{O_2F'}$, donc $O_2F' \simeq \frac{h_1}{\alpha} = \frac{R}{n-1}$.

Puisque cette position ne dépend pas de h_1, ceci signifie que tous les rayons parallèles à l'axe optique passent par F' : le système est bien stigmatique.

3B. 5. e. On doit alors avoir $R = (n-1)O_2F' \simeq 26$ mm. C'est en accord avec la valeur trouvée graphiquement.

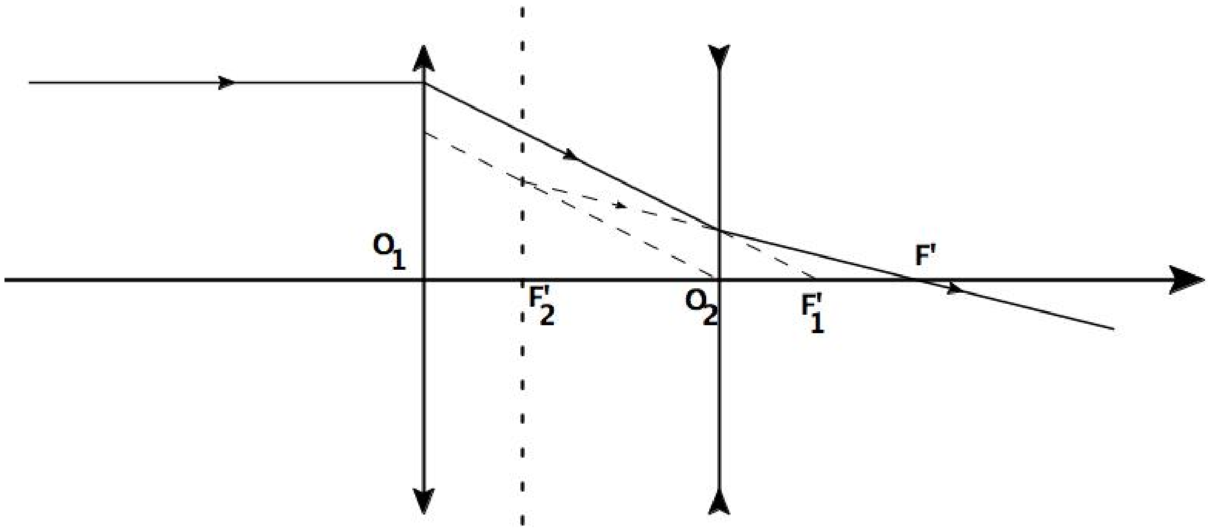
3B. 5. f. On peut mesurer $O_1O_2 = CO_2 - CO_1$ or $CO_2 = R$ par définition et si on appelle r le rayon de la lentille, $CO_1^2 + r^2 = R^2$, donc $CO_1 = \sqrt{R^2 - r^2}$. On trouve donc :

$$O_1O_2 = R\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}\right) \simeq 9,4 \text{ mm}.$$

On trouve donc une lentille dont l'épaisseur est de l'ordre de la moitié de son rayon, ou de la moitié de son rayon de courbure, ou encore 20 % de sa longueur focale. C'est loin d'être une lentille mince !

Note : c'est pour ceci que les objectifs d'appareil photo ne sont pas constitués de lentilles sphériques, on parle de lentilles asphériques, taillées avec une forme particulière afin de limiter l'astigmatisme.

3C Utilisation d'un téléobjectif



3C. 1.
L'objet doit avoir son image A_1B_1 situé entre L_2 et son foyer objet F_2 pour que son image A_2B_2 soit réelle. On doit donc avoir $e - f_2' > f_1' > e$. On peut le vérifier avec la relation de conjugaison de Descartes appliquée à la lentille L_2 pour un objet situé à l'infini, comme demandé aux questions suivantes, on trouve $\overline{O_2A_2} = \frac{f_2'(f_1'-e)}{-e+f_2'+f_1'}$ et pour que l'image soit réelle, il faut que $\overline{O_2A_2} > 0$, donc on a bien l'encadrement précédent.

3C. 2. Un objet situé à l'infini aura son image dans le plan focal image de la lentille L_1 donc à une distance $f'1$ après celle-ci.

3C. 3. L'image intermédiaire A_1 est à une distance $f'1$ de la lentille L_1, et si on applique les relations de conjugaison à la deuxième lentille, on trouve $\frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'}$.
Avec $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1} = -e + f_1'$ on trouve $\frac{1}{\overline{O_2F'}} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{f_1'-e}$. On obtient donc la position du foyer image du doublet F' :

$$\overline{O_2F'} = \frac{f_2'(f_1'-e)}{f_1'-e+f_2'}.$$

3C. 4. Déterminons tout d'abord la taille et la position de l'image de l'oiseau à travers la première lentille. On a $\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'}$, donc $\overline{O_1A_1} = \frac{f_1'\overline{O_1A}}{f_1'+\overline{O_1A}} \simeq 20$ mm. On en déduit que la position de l'image de l'oiseau est dans le plan focal image de la lentille L_1, comme pour le cas de l'objectif simple.
La taille de l'image est obtenue grâce au grandissement transverse de l'oiseau à travers L_1, $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \simeq -8.10^{-4}$. On en déduit une taille de l'image $A_1B_1 \simeq 1,6.10^{-4}$ m.
On fait ensuite la même démarche pour l'image de A_1B_1 à travers la deuxième lentille : $\overline{O_2A_2} = \frac{f_2'\overline{O_2A_1}}{f_2'+\overline{O_2A_1}}$, et on utilise à nouveau le fait que $A_2 = F'$ puisque A_1 est dans le plan focal image de L_1.
On trouve donc $\overline{O_2A_2} = \frac{f_2'(f_1'-e)}{-e+f_2'+f_1'} \simeq 240$ mm.
Le grandissement transverse de cette deuxième lentille est $\gamma_2 = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A_2}}{\overline{O_2A_1}} = \frac{f_2'}{f_1'+f_2'-e} \simeq 25$.
L'image de l'oiseau à travers le doublet a donc une taille $\overline{A_2B_2} = \gamma_1\gamma_2\overline{AB} \simeq 4,0$ mm. L'oiseau a donc une image sur le capteur 10 fois plus grande qu'avec un objectif de 50 mm, et donc de la même taille que si on avait utilisé un objectif de 500 mm.

3C. 5. Le capteur doit se situer en A_2, donc on a $\overline{O_1A_2} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_2} \simeq 254$ mm. On a donc réussi en utilisant ce téléobjectif à passer d'une distance entre L_1 et le capteur de 500 mm dans le cas d'un objectif simple de focale 500 mm à une distance de 254 mm pour le téléobjectif, l'encombrement est réduit de moitié, c'est l'avantage des téléobjectifs.

Fin du corrigé