

# PHYSIQUE 6 FILTRAGE.

## Expériences

- ☛ Résonance d'un système masse-ressort
- ☛ Filtrage passe-bas ou passe-haut d'une source audio

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Modélisation et approche de la résonance</b>	<b>3</b>
1.1	Définition . . . . .	3
1.2	Bilan énergétique . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Résolution avec les complexes</b>	<b>5</b>
2.1	Utilisation . . . . .	5
2.2	Résonance en vitesse . . . . .	6
2.2.1	Résolution . . . . .	6
2.2.2	Allure et interprétation . . . . .	7
2.2.3	Bande passante . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Résonances en électricité</b>	<b>8</b>
3.1	Circuit étudié et outils . . . . .	8
3.1.1	Circuit . . . . .	8
3.1.2	Outil complexe en électricité . . . . .	8
3.1.3	Impédances usuelles . . . . .	8
3.2	Résonance en intensité . . . . .	9
3.2.1	Résolution . . . . .	9
3.2.2	Allure et interprétation . . . . .	9
3.3	Résonance en tension . . . . .	9
<b>II</b>	<b>Filtrage</b>	<b>10</b>
<b>1</b>	<b>Rappels sur les signaux sinusoïdaux</b>	<b>10</b>
1.1	Forme d'un signal sinusoïdal . . . . .	10
1.2	Intérêt des signaux sinusoïdaux : série de Fourier . . . . .	11
1.3	Caractéristiques d'un signal périodique . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Filtre</b>	<b>12</b>
2.1	Définitions . . . . .	12
2.2	Fonction de transfert . . . . .	12
2.3	Diagramme de Bode . . . . .	12
2.3.1	Tracé du diagramme de Bode du circuit RC . . . . .	13
2.3.2	Etude des asymptotes . . . . .	13
2.4	Réponse d'un filtre à un signal . . . . .	14
2.4.1	Avec la fonction de transfert . . . . .	14
2.4.2	Avec le diagramme de Bode . . . . .	14

<b>3</b>	<b>Etude de filtres classiques</b>	<b>14</b>
3.1	Filtres classiques . . . . .	14
3.1.1	Passe-bas . . . . .	14
3.1.2	Passe-haut . . . . .	14
3.1.3	Passe-bande . . . . .	14
3.1.4	Coupe-bande . . . . .	15
3.1.5	Déphaseur . . . . .	15
3.1.6	Filtre passe-bas du second ordre . . . . .	15
3.2	Gabarit d'un filtre . . . . .	16
3.3	Filtres en cascade . . . . .	17

## Première partie

# Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé

On réutilise la simulation de G. Tulloue à propos de l'oscillateur amorti, en l'occurrence le modèle de l'amortisseur de voiture, lorsque la voiture roule sur une route de profil sinusoïdal. On observe alors que l'amplitude des oscillations verticales de la voiture dépend de la valeur du facteur de qualité, mais aussi de la vitesse à laquelle roule la voiture (en réalité, de la fréquence temporelle des oscillations verticales). Nous voyons d'ailleurs qu'il y a une valeur caractéristique de la fréquence pour laquelle les amplitudes sont maximales, et bien plus grandes que celles de la route : c'est le phénomène de **résonance** qu'on étudiera dans cette partie.

On va étudier dans un premier temps ce système mécanique, puis nous verrons lors de l'étude des circuits électriques comment l'étude d'un tel système linéaire soumis à une excitation sinusoïdale sera simplifiée par l'introduction des grandeurs physiques complexes, en particulier la notion d'impédance complexe en électricité.

## 1 Modélisation et approche de la résonance

### 1.1 Définition

On considère un système masse-ressort en présence de frottements (un oscillateur amorti) pour lequel on fait bouger le point d'attache A du ressort selon  $x_A(t) = x_m \cos \omega t$ . On définit l'origine de l'axe  $x$  comme le point où est situé la masse au repos quand le point d'attache ne bouge pas (le ressort fait alors sa longueur à vide).

La projection du PFD sur l'axe horizontal comme précédemment pour l'oscillateur amorti devient :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_A) - h \frac{dx}{dt}$$

que l'on met sous la forme canonique :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_m \cos(\omega t),$$

en posant encore  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $Q = \frac{\sqrt{km}}{h}$ .

On ne s'intéresse dans cette partie qu'au régime permanent, une fois que le régime transitoire est terminé, donc il n'y aura pas d'influence des conditions initiales.

On va chercher la solution en régime permanent sous la forme d'un signal sinusoïdal à la pulsation  $\omega$  (de la même manière qu'on a cherché une solution particulière constante lorsque le second membre était constant). Supposons donc que l'on ait  $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$  et cherchons la valeur de  $x_0$  que l'on obtient.

Alors on doit avoir :

$$-x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \phi) - \frac{\omega \omega_0}{Q} x_0 \sin(\omega t + \phi) + \omega_0^2 x_0 \cos(\omega t + \phi) = \omega_0^2 x_m \cos(\omega t)$$

Cette égalité est alors possible à condition que :

$$\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left( \frac{\omega \omega_0}{Q} \right)^2 \right] x_0^2 = \omega_0^4 x_m^2,$$

et donc l'amplitude du régime permanent est :

$$x_0 = \frac{x_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left( \frac{\omega \omega_0}{Q} \right)^2}} = \frac{x_m}{\sqrt{\left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{\omega}{\omega_0 Q} \right)^2}}.$$

On a tracé cette fonction pour différentes valeurs du facteur de qualité dans la figure 1. On peut observer que l'amplitude passe par un maximum pour une valeur donnée de  $\omega$  quand le facteur de qualité est plus grand que  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , c'est le phénomène de **résonance**.

### Interprétation

- si  $\omega_0 \gg \omega$ , le point d'attache bouge très lentement devant la période propre du système : la masse suit tout le temps à la variation ;
- si  $\omega \gg \omega_0$ , le point d'attache bouge très rapidement : le système n'arrive pas du tout à suivre et reste à sa position d'équilibre (comme s'il effectuait une moyenne)
- si  $\omega \simeq \omega_0$  : transfert d'énergie très grand, on entre en résonance

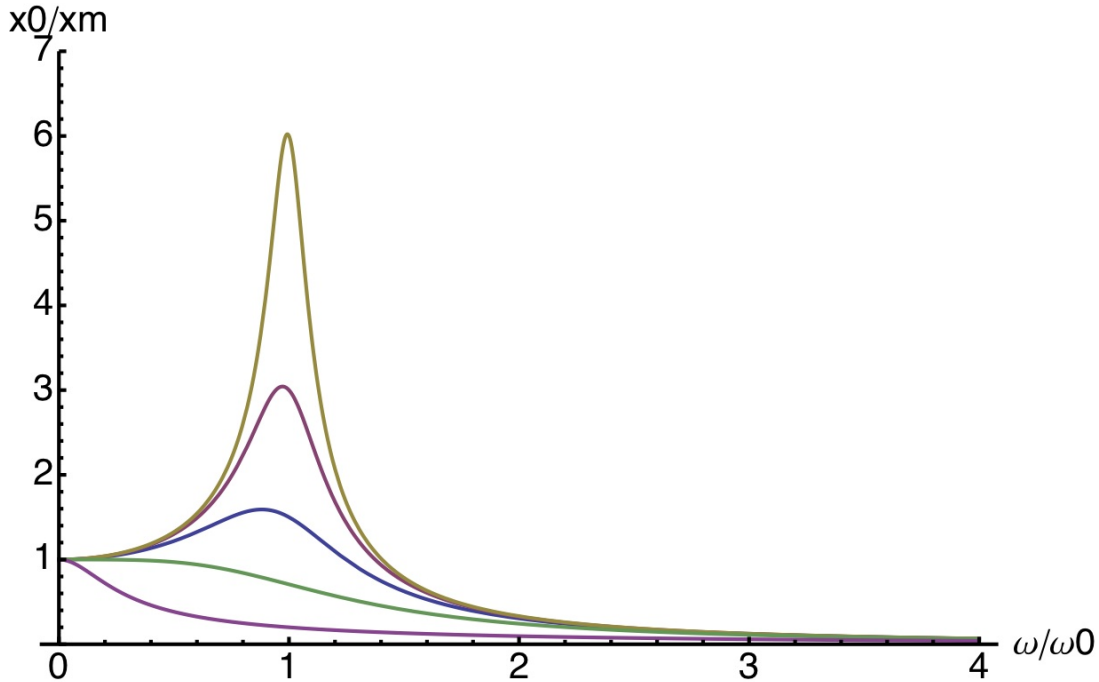


FIGURE 1 – Amplitude du régime permanent en fonction de la pulsation de l'excitation pour différentes valeurs du facteur de qualité : de haut en bas  $Q = 0,2; 0,5; 1,5; 3$  et  $6$ .

### Définition

On observe, en régime sinusoïdal forcé, un phénomène de **résonance** pour une grandeur physique lorsque l'amplitude de celle-ci admet un maximum pour une fréquence particulière appelée **fréquence de résonance**.

Pour pouvoir observer une résonance en élongation, il faut donc que  $x_0(\omega)$  passe par un maximum pour  $\omega > 0$ . On pourrait dériver l'expression de  $x_0(\omega)$  par rapport à  $\omega$  mais il est plus simple de voir que  $x_0(\omega) = x_m / \sqrt{P((\omega/\omega_0)^2)}$  en posant  $P$  le polynôme du second ordre  $P(X) = (1 - X)^2 + X/Q^2$ .

Ainsi,  $x_0$  passe par un maximum si  $P$  admet un minimum pour  $X > 0$ . Le minimum de  $P(X) = X^2 - (2 - 1/Q^2)X + 1$  est atteint en  $(2 - 1/Q^2)/2 = 1 - 1/(2Q^2)$ .

On observe donc ici, dans le cas  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  une **résonance en élongation**, à la pulsation  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(2Q^2)}$

Toutefois, le calcul n'est pas fini, il faut encore déterminer la valeur du déphasage  $\phi$ . On peut par exemple regarder ce qu'il se passe au temps  $t = \frac{-\phi}{\omega}$ , on a alors :

$$\begin{aligned}
 -x_0\omega^2 \cos(\omega t + \phi) - \frac{\omega\omega_0}{Q}x_0 \sin(\omega t + \phi) + \omega_0^2x_0 \cos(\omega t + \phi) &= x_m\omega_0^2 \cos(\omega t) \\
 x_0(\omega_0^2 - \omega^2) &= x_m\omega_0^2 \cos \phi
 \end{aligned}$$

et au temps  $t = \frac{\pi/2 - \phi}{\omega}$  :

$$\begin{aligned}
 -x_0\omega^2 \cos(\omega t + \phi) - \frac{\omega\omega_0}{Q}x_0 \sin(\omega t + \phi) + \omega_0^2x_0 \cos(\omega t + \phi) &= x_m\omega_0^2 \cos(\omega t) \\
 -\frac{\omega\omega_0}{Q}x_0 &= x_m\omega_0^2 \cos(\pi/2 - \phi) = x_m\omega_0^2 \sin \phi
 \end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\phi = \text{Arctan} \left( \frac{-\frac{\omega\omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \text{Arctan} \left( Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) - \frac{\pi}{2}.$$

En utilisant la relation  $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x) = \text{sgn}(x)\pi/2$ .

## 1.2 Bilan énergétique

En régime permanent, l'énergie du système est conservée en moyenne : le mouvement est périodique, donc au bout d'une période, on est de retour à la même position (même énergie potentielle) avec la même vitesse (même énergie cinétique). On en déduit donc que les frottements dissipent autant d'énergie que celle qui est fournie par la force excitatrice (due au mouvement du point d'attache).

Calculons la puissance moyenne des forces de frottements :

$$\langle P \rangle = \langle -hv^2 \rangle = \langle -h(-x_0\omega \sin(\omega t + \phi))^2 \rangle = -\frac{hx_0^2\omega^2}{2}$$

Ainsi la puissance transmise par la force excitatrice est en moyenne :

$$P_{fournie} = \frac{hx_0^2\omega^2}{2} = \frac{hx_m^2/2}{\left(\frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 Q}\right)^2}$$

Proche de la résonance, on a alors  $\omega \simeq \omega_0$  et cette expression se simplifie en :

$$P_{fournie} = \frac{h\omega_0^2}{2} x_0^2,$$

donc la résonance correspond à la pulsation pour laquelle l'énergie transférée depuis la source est maximale (puisque la résonance est définie comme la pulsation telle que  $x_0$  est maximal).

A la résonance, le transfert d'énergie entre la source excitatrice et le système est maximal.

On a donc trouvé (laborieusement) le régime permanent du circuit lorsqu'il est soumis à une force dépendant sinusoidalement du temps. On a remarqué qu'il fallait uniquement déterminer un réel positif  $x_0$  et un angle  $\phi$ . Mathématiquement, c'est équivalent à déterminer le nombre complexe  $\underline{x} = x_0 e^{i\phi}$ , et il se trouve que l'introduction des nombres complexes va grandement faciliter notre étude.

## 2 Résolution avec les complexes

### 2.1 Utilisation

En régime sinusoidal à la pulsation  $\omega$  tous les signaux peuvent se mettre sous la forme :

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t + \phi)$$

pour lesquels il "suffit" de déterminer l'amplitude  $y_0 \geq 0$  et la phase initiale  $\phi \in [0, 2\pi]$ , qui sont donc le module et l'argument d'un nombre complexe.

Il est donc tentant de généraliser une équation différentielle réelle (par exemple, celle d'un oscillateur amorti avec un second membre sinusoidal à la pulsation  $\omega$  :  $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 y_m \cos(\omega t)$ ) en une équation différentielle complexe :

$$\frac{d^2 \underline{y}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{y}}{dt} + \omega_0^2 \underline{y} = \omega_0^2 y_m \cos(\omega t) + jz(t)$$

pour laquelle la fonction  $\underline{y}$  est une fonction complexe  $\underline{y}(t) = y_r(t) + jy_i(t)$  (on note  $j$  le complexe tel que  $j^2 = -1$  afin d'éviter une confusion avec un courant électrique),  $y_r$ ,  $y_i$  et  $z$  étant des fonctions réelles.

On peut choisir  $z$  comme l'on souhaite, et si  $\underline{y}$  est bien solution de l'équation, alors sa partie réelle est solution de l'équation de départ puisque en ne regardant que la partie réelle de l'équation complexe, on a l'équation  $\frac{d^2 y_r}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy_r}{dt} + \omega_0^2 y_r = \omega_0^2 y_m \cos(\omega t)$ .

Puisque l'on suppose que  $y_r(t) = y_0 \cos(\omega t + \phi)$ , on choisit de prendre pour la fonction  $y_i(t) = y_0 \sin(\omega t + \phi)$  et alors on peut écrire  $\underline{y}(t) = y_0 \cos(\omega t + \phi) + j y_0 \sin(\omega t + \phi) = y_0 e^{j\omega t + \phi}$ . Ce choix particulier permet alors de facilement calculer la dérivée puisque  $\frac{dy}{dt} = j\omega y$  : l'opération de dérivée d'une fonction s'est transformée en une simple multiplication par une constante.

De plus en posant  $\underline{y}_0 = y_0 e^{j\phi}$ , on a directement  $\underline{y}(t) = \underline{y}_0 e^{j\omega t}$ , et  $\underline{y}_0$  contient les deux informations que l'on cherche puisque  $y_0$  l'amplitude des oscillations est son module et  $\phi$  la phase initiale est son argument.

Le membre de gauche de l'équation différentielle devient ainsi :

$$\frac{d^2 \underline{y}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{y}}{dt} + \omega_0^2 \underline{y} = (-\omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} + \omega_0^2) \underline{y}_0 e^{j\omega t}.$$

et toute la dépendance temporelle est donc dans une exponentielle complexe  $e^{j\omega t}$ .

On remarque alors qu'il est possible de faire de même pour le membre de droite en posant  $z(t) = \omega_0^2 y_m \sin \omega t$  et alors le membre de droite s'écrit  $\omega_0^2 y_m \cos(\omega t) + j z(t) = \omega_0^2 y_m e^{j\omega t}$ .

Puisque  $e^{j\omega t} \neq 0$  (son module vaut 1), on peut diviser par  $e^{j\omega t}$  des deux côtés de l'équation différentielle et on obtient une simple équation  $(-\omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} + \omega_0^2) \underline{y}_0 = \omega_0^2 y_m$ , où n'apparaît plus de dépendance temporelle !

La solution est alors  $\underline{y}_0 = \frac{y_m \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}}$ .

On trouve alors directement la solution particulière en revenant dans l'espace réel  $y(t) = \Re(\underline{y}(t)) = y_0 \cos(\omega t + \phi)$  avec  $y_0 = |\underline{y}_0|$  et  $\phi = \text{Arg}(\underline{y}_0)$ .

Si on applique ce raisonnement à la position de la masse trouvée précédemment, on trouve que :

$$x(t) = \Re(\underline{x}_0 e^{j\omega t}),$$

si on pose  $\underline{x}_0 = x_0 e^{j\phi}$ . Si on trouve  $\underline{x}_0$ , on aura alors directement  $x_0 = |\underline{x}_0|$  et  $\phi = \text{Arg}(\underline{x}_0)$ .

On applique donc les dérivations à  $\underline{x}$  et l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = x_m \omega_0^2 \cos(\omega t)$$

devient :

$$\begin{aligned} (j\omega)^2 \underline{x}_0 e^{j\omega t} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{x}_0 e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{x}_0 e^{j\omega t} &= \underline{x}_m \omega_0^2 e^{j\omega t} \\ \left[ (\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \right] \underline{x}_0 &= \underline{x}_m \omega_0^2 \\ \underline{x}_0 &= \frac{\underline{x}_m \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} \end{aligned}$$

On a donc directement résolu le problème et on trouve à nouveau (comme attendu, et de manière plus rapide) :

$$\begin{aligned} x_0 = |\underline{x}_0| &= \frac{x_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}} = \frac{x_m}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q \omega_0}\right)^2}}; \\ \phi = \text{Arg}(\underline{x}_0) &= -\text{Arctan}\left(\frac{\frac{\omega \omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = -\text{Arctan}\left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

On observe donc bien une résonance pour  $Q > 1/2$  à la pulsation de résonance :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Dans le cas  $Q \gg 1$  (assez fréquent en pratique), on trouve  $\omega_r \simeq \omega_0$ , et le maximum vaut alors  $x_{max} \simeq Q x_m$ .

Exercice : avec une courbe de résonance donnée, déterminer  $\omega_0$  et  $Q$ .

## 2.2 Résonance en vitesse

### 2.2.1 Résolution

Maintenant que nous avons les outils nécessaires à l'étude des régimes sinusoïdaux, appliquons les à l'étude de la vitesse de la masse.

On va pouvoir écrire  $\underline{v}(t) = \underline{v}_0 e^{j\omega t}$ .

De plus, puisque  $\underline{v} = \frac{dx}{dt}$ , on trouve directement  $\underline{v}_0 = j\omega \underline{x}_0$ , on a donc :

$$\begin{aligned} \underline{v}_0 &= \frac{j\omega x_m \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega\omega_0}{Q}} = x_m \omega_0 Q \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \\ v_0 &= x_m \omega_0 Q \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \\ \phi_v &= -\text{Arctan}\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \end{aligned}$$

### 2.2.2 Allure et interprétation

On a donc :

$$v_0 = x_m \omega_0 Q \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

On observe alors qu'il y a toujours un maximum, quelle que soit la valeur de  $Q$ , atteint pour  $\omega = \omega_0$  : il y a toujours **résonance en vitesse**.

On peut refaire la même analyse :

- si  $\omega_0 \gg \omega$ , le point d'attache bouge très lentement devant la période propre du système, la masse a une vitesse très faible (celle du point d'attache) ;
- si  $\omega \gg \omega_0$ , le point d'attache bouge très rapidement : le système n'arrive pas du tout à suivre et reste à sa position d'équilibre, sa vitesse est très faible ;
- si  $\omega = \omega_0$  : transfert d'énergie très grand, on entre en résonance et  $v_{max} = \frac{g_0 Q}{\omega_0} = \frac{F_0}{h}$  donc la vitesse maximale ne dépend plus de la masse.

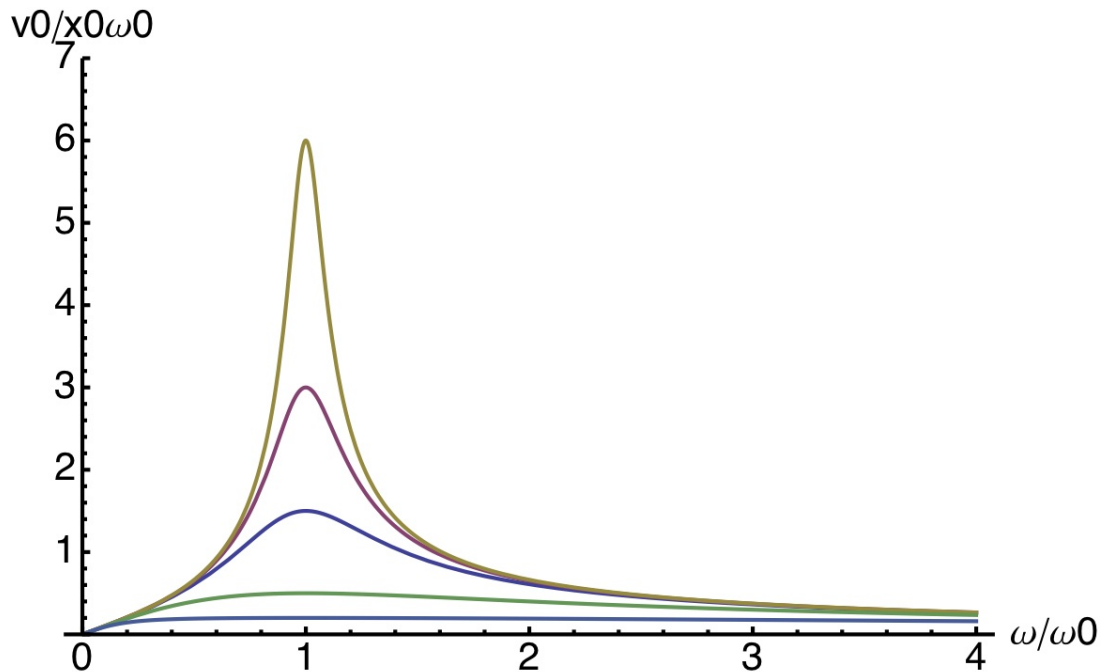


FIGURE 2 – Amplitude de la vitesse du régime permanent en fonction de la pulsation de l'excitation pour différentes valeurs du facteur de qualité : de haut en bas  $Q = 0,2 ; 0,5 ; 1,5 ; 3$  et  $6$ .

Enfin, on observe sur la figure 2 que plus le facteur de qualité est élevé, plus la résonance est **piquée**, c'est la notion de bande passante abordée maintenant.

### 2.2.3 Bande passante

#### Définition

La **bande passante** est l'intervalle de fréquence (ou de pulsation) pour lesquelles la valeur de l'amplitude est supérieure ou égale à la valeur maximale (à la résonance) divisée par  $\sqrt{2}$ .

Dessin.

Regardons alors la valeur de la bande passante pour la résonance en vitesse.

Pour la résonance en vitesse, on cherche les valeurs telles que :

$$x_m \omega_0 Q \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \geq x_m \omega_0 Q \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On doit donc avoir pour les deux valeurs limites de la pulsation  $Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1$ . Posons  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  et l'équation devient  $Q(x + 1/x) = \pm 1$  dont on doit garder uniquement les deux solutions positives. L'équation peut se réécrire  $x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$  et donc les deux solutions positives sont  $x_{1,2} = \frac{\pm 1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$ .

La bande passante est donc donnée par la valeur  $\Delta\omega = \omega_0(x_2 - x_1) = \frac{\omega_0}{Q}$ .

On retrouve donc bien le fait que plus le facteur de qualité est élevé, plus la résonance est piquée.

## 3 Résonances en électricité

### 3.1 Circuit étudié et outils

#### 3.1.1 Circuit

On va étudier dans cette partie un circuit RLC série branché sur un GBF délivrant une tension sinusoïdale  $E(t) = E_m \cos \omega t$ .

L'étude d'une tension sinusoïdale est motivée par deux raisons : tout d'abord, le réseau électrique EDF délivre une tension sinusoïdale ( $E_m = 220$  V à la fréquence de 50 Hz), ensuite, la décomposition en série de Fourier nous assure que l'on pourra directement résoudre le cas plus général d'une tension qui varie périodiquement.

#### 3.1.2 Outil complexe en électricité

Nous avons vu que l'introduction des fonctions complexes simplifiait grandement l'étude des signaux sinusoïdaux puisque tant le régime permanent que la tension du GBF pourront être factorisées par  $e^{j\omega t}$  qui se simplifiera lors des calculs.

On introduit donc des tensions et des intensités complexes comme  $\underline{u}(t) = u_0 e^{j\omega t}$  et  $\underline{i}(t) = i_0 e^{j\omega t}$

On définit alors pour tous les dipôles une impédance complexe  $\underline{Z}$  telle que  $\underline{Z} = \frac{u_0}{i_0} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}$ .

Toutes les lois de l'électricité linéaires sont aussi valables en complexe, en particulier, les lois de Kirchhoff.

On peut donc associer en série ou en parallèle des impédances complexes et on trouve :

- Association série :  $\underline{Z}_{eq,s} = \Sigma \underline{Z}_i$
- Association parallèle :  $\frac{1}{\underline{Z}_{eq,p}} = \Sigma \frac{1}{\underline{Z}_i}$

Les formules des ponts diviseurs de courant et de tension sont aussi linéaires, donc toujours valables :

- Pont diviseur de tension :  $\underline{u}_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \underline{u}$
- Pont diviseur de courant :  $\underline{i}_2 = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \underline{i}$

#### 3.1.3 Impédances usuelles

On peut alors calculer l'impédance des dipôles usuels, en particulier ceux qui nous intéressent dans ce circuit.

- conducteur ohmique : la relation courant-tension (loi d'Ohm) est  $u(t) = Ri(t)$ , on a donc  $\underline{Z} = R \in \mathbb{R}$ . Puisque l'impédance est réelle, on retrouve que tension et intensité sont en phase.



- Condensateur : la relation courant-tension est  $i = C \frac{du}{dt}$ , donc en régime sinusoïdal et avec les notations complexes  $i_0 = jC\omega u_0$ . Ainsi, l'impédance complexe d'un condensateur est  $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$ . Elle dépend donc de la fréquence à laquelle on l'étudie, et puisque la partie imaginaire de  $\underline{Z}$  est négative, la tension est en retard sur le courant.
- Bobine : la relation courant-tension est  $u = L \frac{di}{dt}$ , donc en régime sinusoïdal et avec les notations complexes  $u_0 = jL\omega i_0$  donc l'impédance complexe d'une bobine est  $\underline{Z} = jL\omega$ . Elle dépend donc de la fréquence à laquelle on l'étudie, et puisque la partie imaginaire de  $\underline{Z}$  est positive, la tension est en avance sur le courant.

On retrouve les comportements attendus en régime permanent ( $\omega \rightarrow 0$ ) :  $\underline{Z}_C \rightarrow \infty$  (condensateur équivalent à un coupe-circuit) et  $\underline{Z}_L \rightarrow 0$  (bobine équivalente à un fil).

On obtient aussi les comportement à hautes fréquences  $\omega \rightarrow \infty$  :  $\underline{Z}_C \rightarrow 0$  (condensateur équivalent à un fil) et  $\underline{Z}_L \rightarrow \infty$  (bobine équivalente à un coupe-circuit).

## 3.2 Résonance en intensité

### 3.2.1 Résolution

En utilisant l'analogie que l'on a vu, on s'attend à ce que la résonance en intensité soit comparable à la résonance en vitesse : visible quelle que soit la valeur du facteur de qualité, et à la pulsation  $\omega_r = \omega_0$ .

Le GBF fournit une tension  $\underline{E}(t) = E_m e^{j\omega t}$ , et nous cherchons l'intensité du courant délivré. Il nous faut donc trouver l'impédance du circuit et la réponse sera immédiate.

Nous associons en série une résistance, un conducteur ohmique et une inductance, donc l'impédance équivalente est :

$$\underline{Z}_{eq} = jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}.$$

On obtient donc :

$$\underline{i} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{E_m}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{E_m/R}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}.$$

On a donc  $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \phi)$  avec :

$$i_0 = \frac{E_m/R}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

$$\phi = \text{Arctan}\left(Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)$$

### 3.2.2 Allure et interprétation

On a bien résonance pour toute valeur de  $Q$ , à la pulsation de résonance  $\omega_r = \omega_0$ . Le maximum est alors de  $E_m/R = E_m Q \sqrt{\frac{C}{L}}$  donc proportionnel à  $Q$ . Ce sont comme attendus les mêmes résultats que pour la résonance en vitesse du système masse-ressort.

- Quand  $\omega \ll \omega_0$ , on est en régime quasi-permanent : le condensateur agit comme un coupe-circuit, et donc le courant tend vers 0 ;
- quand  $\omega \gg \omega_0$ , on est en très haute fréquence : la bobine agit alors comme un coupe-circuit, et donc le courant tend vers 0 ;
- quand  $\omega = \omega_0$ , alors  $\phi = 0$ , le courant et la tension sont en phase. Le circuit est donc purement résistif, ce que l'on peut vérifier car  $\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + jL\omega(1 - LC\omega^2) = R$ . Puisque tension et intensité sont en phase, le mode XY de l'oscilloscope est celui qui permet de repérer le plus précisément la résonance.

La bande passante en pulsation est une fois de plus  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ .

## 3.3 Résonance en tension

Sur le même circuit, on s'intéresse maintenant à la tension aux bornes du condensateur  $u(t)$ .

On peut utiliser un pont diviseur de tension et on a directement :

$$\underline{u}(t) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{E}(t)$$

On trouve donc  $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \phi_u)$  avec :

$$u_0 = \left| \frac{E_m \frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} \right| = \frac{E_m}{|(1 - LC\omega^2) + jRC\omega|} = \frac{E_m}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}$$

$$\phi_u = \text{Arg} \left( \frac{E_m}{(1 - LC\omega^2) + jRC\omega} \right) = -\text{Arctan} \left( \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2} \right)$$

On pose alors comme déjà vu  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  pour retrouver des expressions similaires à celles de la résonance en élévation :

$$u_0 = \frac{E_m}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

$$\phi_u = \text{Arctan} \left( Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) - \frac{\pi}{2}$$

On va donc ici aussi n'observer une résonance qu'à la condition que  $Q \geq 1/\sqrt{2}$ . La pulsation de résonance est  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ .

Dans le cas faiblement amorti, la tension à la résonance est alors  $u_{max} \simeq QE_m$ , ce qui peut amener des surtensions très élevées (et donc détruire le condensateur!).

- Quand  $\omega \ll \omega_0$ , on est en régime quasi-permanent : le condensateur agit comme un coupe-circuit et la bobine comme un fil, donc le courant tend vers 0 et avec la loi des mailles on a  $u = E$ , donc  $u_0 = E_m$  et les deux tensions sont en phase ;
- quand  $\omega \gg \omega_0$ , on est en très haute fréquence : le condensateur agit alors comme un fil donc  $u_0 \rightarrow 0$  ;
- quand  $\omega = \omega_0$ , alors  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ , les deux tensions sont en quadrature de phase, compatible avec la valeur imaginaire pure de l'impédance (en mode XY, l'ellipse a ses axes horizontaux et verticaux).

## Deuxième partie

# Filtrage

Nous avons vu dans la partie précédente qu'un oscillateur, lorsqu'il est soumis à une excitation sinusoïdale a une réponse en régime établi qui est elle aussi sinusoïdale. Toutefois, l'amplitude de cette réponse dépend de la fréquence de l'excitation, on a par exemple vu qu'un oscillateur amorti pouvait présenter un maximum pour l'amplitude de la réponse à une fréquence bien définie qu'on appelle la fréquence de résonance. On peut maintenant imaginer que la source envoie un signal qui est la somme de deux signaux sinusoïdaux, un qui serait à la fréquence de résonance, et le second loin de la fréquence de résonance. On va alors voir que la linéarité des équations différentielles considérées permet d'affirmer que la réponse de l'oscillateur est alors la somme de la réponse à chaque signal pris séparément. On va donc avoir la somme de deux signaux sinusoïdaux, mais celui qui est à la fréquence de résonance sera d'amplitude bien supérieure au deuxième, on va donc "éliminer" le deuxième signal ; on a réalisé une opération de filtrage. L'objet de ce chapitre est d'étudier plus précisément cette notion de filtrage.

## 1 Rappels sur les signaux sinusoïdaux

### 1.1 Forme d'un signal sinusoïdal

Un signal  $y(t)$  sinusoïdal à la pulsation  $\omega$  (ou à la fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ) peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t + \phi) = y_1 \cos(\omega t) + y_2 \sin(\omega t)$$

On définit alors :

- l'amplitude  $y_0 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$

- la phase initiale  $\phi = -\text{Arctan}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$

On peut passer facilement d'une forme à l'autre grâce à la relation de trigonométrie  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ , d'où  $y_1 = y_0 \cos \phi$  et  $y_2 = -y_0 \sin \phi$ .

Nous avons vu l'intérêt de l'outil complexe dans le chapitre précédent, on peut donc suspecter qu'il y a un intérêt à introduire la fonction complexe :

$$\underline{y}(t) = y_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \underline{y_0} e^{j\omega t}$$

où on a posé  $\underline{y_0} = y_0 e^{j\phi}$ .

On a alors :

$$y(t) = \Re(\underline{y}(t)) \quad y_1 = \Re(\underline{y_0}) \quad y_2 = \Im(\underline{y_0}) \quad y_0 = |\underline{y_0}| \quad \phi = \text{Arg}(\underline{y_0})$$

## 1.2 Intérêt des signaux sinusoïdaux : série de Fourier

Les signaux sinusoïdaux sont les "briques élémentaires" qui permettent de construire tous les signaux (un peu comme les nombres premiers pour les entiers naturels).

On peut ainsi écrire tout signal  $y(t)$  périodique de période  $T$  comme une somme de signaux sinusoïdaux de pulsations  $\omega_n = \frac{2\pi n}{T} = n\omega$  par la relation :

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

On peut généraliser ce résultat aux fonctions complexes et écrire :

$$\underline{y}(t) = \underline{a_0} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underline{a_n} e^{jn\omega t}$$

On appelle une telle écriture l'écriture en **série de Fourier** de la fonction  $\underline{y}$ .

- $\underline{a_0}$  est la valeur moyenne du signal ;
- $\underline{a_n} e^{jn\omega t}$  est l'harmonique de rang  $n$ , de fréquence  $f_n = n f$  ( $f$  est la fréquence du signal périodique considéré), d'amplitude  $|\underline{a_n}|$  et de phase initiale  $\text{Arg}(\underline{a_n})$ .

On peut pour toute fonction  $\underline{y}$  déterminer la valeur des coefficients  $\underline{a_n}$  grâce à la formule :

$$\underline{a_n} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \underline{y}(t) e^{-jn\omega t} dt$$

On appelle la donnée de tous les coefficients  $\underline{a_n}$  le **spectre**.

Un oscilloscope numérique (entre autres) permet de calculer le spectre d'un signal acquis, et on peut le visualiser sous deux formes différentes, soit en visualisant module et argument des coefficients de Fourier  $\underline{a_n}$ , soit en visualisant parties réelles et imaginaires.

On peut généraliser cette décomposition en cosinus et sinus à toutes les fonctions, même pas périodiques. On doit alors changer la somme sur les harmoniques en une intégrale sur toutes les fréquences, on parle alors de transformation de Fourier (c'est ce que fait l'oscilloscope).

## 1.3 Caractéristiques d'un signal périodique

On utilise deux grandeurs qui peuvent permettre de caractériser une partie d'un signal périodique  $y(t)$  de période  $T$ .

1. On peut définir la **valeur moyenne** :

$$\langle y(t) \rangle = y_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y(t) dt.$$

Le résultat est bien évidemment indépendamment du choix de l'origine des temps  $t_0$ .

Un signal sinusoïdal a évidemment une moyenne nulle.

2. On définit aussi la **valeur efficace** :

$$y_{eff} = \sqrt{\langle y^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} y^2(t) dt}$$

Le résultat est indépendant du choix de  $t_0$ .

Un signal sinusoïdal a une valeur efficace qui est son amplitude divisée par  $\sqrt{2}$ .

## 2 Filtre

### 2.1 Définitions

#### Définition

Un **filtre** est un quadripôle qui ne transmet que les signaux dont la fréquence appartient à un intervalle appelé **bande-passante** et bloque les signaux dont la fréquence est dans le complémentaire (la bande rejetée).

En pratique, le passage de la bande passante à la bande rejetée ne peut pas être parfait. On considère qu'une fréquence est dans la bande rejetée si un signal à cette fréquence est suffisamment atténuée par le filtre.

Schéma bloc d'un filtre.

Exemple : circuit RC. Si  $s(t)$  est la tension aux bornes du condensateur, alors à basse fréquence  $s(t) = e(t)$ , à haute fréquence  $s(t) = 0$  : filtre passe-bas. Si on prend la tension aux bornes de la résistance, on inverse : filtre passe-haut.

La plupart du temps entrée et sortie du filtre sont reliées par un équation différentielle. Dans notre étude on se restreindra à des équations différentielles **linéaires** et au maximum du second ordre, donc des équations du type  $\alpha \frac{d^2s}{dt^2} + \beta \frac{ds}{dt} + \gamma s = e$

### 2.2 Fonction de transfert

Puisque les équations sont linéaires, on va pouvoir décomposer l'entrée en série de Fourier, étudier chaque composante séparément puis sommer les solutions : si  $s_1$  et  $s_2$  sont des solutions de l'équation différentielle pour respectivement  $e_1$  et  $e_2$ , alors pour tout  $\lambda$  et  $\mu$ ,  $\lambda s_1 + \mu s_2$  est solution de l'équation différentielle pour  $\lambda e_1 + \mu e_2$ .

On va donc faire l'étude du filtre pur un signal sinusoïdal quelconque, et puisqu'on se place en régime sinusoïdal forcé, l'outil mathématique naturel pour l'étude est l'outil complexe.

On va donc prendre comme entrée  $\underline{e}(t) = e_m e^{j\omega t}$  et chercher la sortie  $\underline{s}(t) = s_m e^{j\omega t}$ .

Toute l'info sur le filtre est donc donné par la fonction complexe  $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ .

#### Définition

La **fonction de transfert complexe** d'un filtre linéaire est une fonction de la pulsation  $\omega$  (ou de la fréquence  $f$ ) définie par :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{s_m}{e_m}$$

- Le module de  $\underline{H}(\omega)$  est le **gain linéaire** du filtre :  $G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|$  ;
- l'argument est le déphasage de  $s(t)$  par rapport à  $e(t)$  :  $\phi(\omega) = \text{Arg}(\underline{H})$ .

Exemple avec le circuit RC :  $\underline{H} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ .

On voit bien dans ce cas que le gain et le déphasage dépendent de la pulsation, on va donc avoir une réponse différente selon la fréquence : exemple conductimètre (on va garder des variations de fréquence plus faible que 1kHz par exemple si on mesure toutes les ms).

On parle souvent du **gain en décibel** d'un filtre  $G_{dB} = 20 \log(G)$ .

L'intérêt est qu'il permet de mieux visualiser des gains linéaires qui varient sur plusieurs ordres de grandeurs, par exemple si  $G$  varie de 0,001 à 1000,  $G_{dB}$  varie de -60 dB à + 60 dB. Mais surtout un gain linéaire de 100 ( $G_{dB} = 40$ ) est aussi proche d'un gain linéaire de 10 ( $G_{dB} = 20$ ) que de 1000 ( $G_{dB} = 60$ ).

Calculs : si on multiplie par 10, le gain en décibel est augmenté de 20 dB. Multiplier par 100 revient à ajouter 40 dB, diviser par 10 à retrancher 20 dB.

- 3 dB correspond à une division par  $\sqrt{2}$ , c'est pourquoi on regarde souvent la bande passante à - 3 dB (par exemple en SI).

### 2.3 Diagramme de Bode

On va donc pour étudier le filtre avoir besoin de représenter la fonction  $\underline{H}(\omega)$ .

Une représentation possible est le **diagramme de Bode** dans lequel on trace le gain et le déphasage séparément. Cependant, pour des raisons de lecture, l'échelle logarithmique est plus adaptée.

Pour le diagramme de Bode on trace :

- $G_{dB} = f\left(\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)$  : diagramme de Bode en gain ;
- $\phi = g\left(\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)$  : diagramme de Bode en phase.

Pour  $\omega_0$ , soit on trouve une valeur caractéristique du circuit (par exemple dans le cas du circuit RC,  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ ), sinon, on prend  $1 \text{ s}^{-1}$ .

### 2.3.1 Tracé du diagramme de Bode du circuit RC

On doit donc tracer les fonctions :

- $G_{dB}(x = \omega/\omega_0) = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$  ;
- $\phi(x) = -\text{Arctan}(x)$ .

Pour les tracés, on regarde les comportements limites afin de tracer les asymptotes :

- basses fréquences  $x \ll 1$ ,  $G_{dB}(x) \simeq 20 \log 1 = 0$  et  $\phi(x) \simeq 0$ , on trace donc les deux asymptotes horizontales ;
- hautes fréquences  $x \gg 1$ ,  $G_{dB}(x) \simeq 20 \log 1/x = -20 \log x$  et  $\phi(x) \simeq \pi/2$ . On peut donc tracer une asymptote horizontale pour le déphase, et pour le gain en décibel, on obtient une droite en échelle logarithmique, de pente  $-20 \text{ dB/décade}$  (on perd  $20 \text{ dB}$  quand on multiplie la fréquence par  $10$ ).

On remarque que pour  $x = 1$ ,  $G_{dB} = -3 \text{ dB}$ , on appelle donc la pulsation  $\omega_0$  la **pulsation de coupure**.

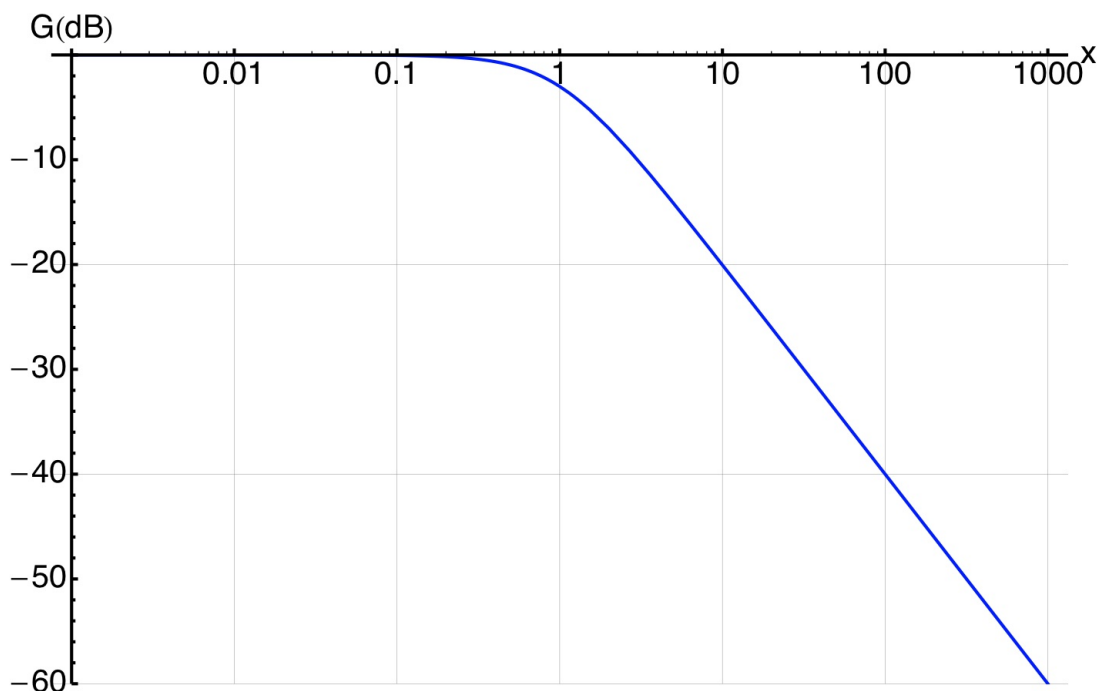


FIGURE 3 – Diagramme de Bode en gain d'un filtre passe-bas du premier ordre.

### 2.3.2 Etude des asymptotes

On a vu une pente à  $-20 \text{ dB/décade}$ , quel est son effet sur un signal haute fréquence ? On a alors  $\underline{H}(\omega) \simeq \frac{\omega_0}{j\omega}$ , ce qui veut dire que  $\underline{s} = \omega_0 \frac{e}{j\omega}$ . On a donc réalisé un montage **intégrateur**.

De manière générale, dans un diagramme de Bode en gain **pente à  $-20 \text{ dB/décade}$  = intégrateur**. Si on veut intégrer un signal périodique de période  $T$  avec ce filtre, il faut s'assurer que toutes les fréquences de la décomposition de Fourier sont dans la pente négative, donc si on appelle  $f_0 = \frac{1}{T}$  la fréquence du fondamental du signal, on aura bien intégré le signal uniquement si  $f_0 > f_c$  avec  $f_c = \frac{\omega_0}{2\pi}$  la fréquence de coupure.

A l'inverse, une pente positive à  $+20 \text{ dB/décade}$  signifie que  $\underline{s} = \frac{\omega}{\omega_0} e$ , on réalise alors un montage **dérivateur**.

## 2.4 Réponse d'un filtre à un signal

### 2.4.1 Avec la fonction de transfert

Exemple sur le passe bas d'ordre 1, de fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{1}{1+j\omega/\omega_0}$  avec  $\omega_0 = 10^3 \text{ s}^{-1}$ .

Si  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ , avec  $E_m = 1,0 \text{ V}$  et  $\omega = 500 \text{ s}^{-1}$ , alors :

- $\underline{H} = \frac{1}{1+j/2}$  ;
- $G = \frac{1}{\sqrt{1,25}} = 0,9$  donc  $S_m = 0,9 \text{ V}$  ;
- $\phi = -\text{Arctan}(1/2) \simeq -0,47 = -27^\circ$  ;
- $s(t) \simeq 0,9 \cos(\omega t - 0,47)$ .

Si on a une combinaison linéaire de plusieurs signaux sinusoïdaux, on fait la même combinaison linéaire des sorties

Exemple, si  $e_2(t) = E_m \cos(\omega t) + \frac{E_m}{2} \cos(2\omega t)$  avec  $E_m = 1,0 \text{ V}$  et  $\omega = 500 \text{ s}^{-1}$ , alors on ajoute au signal  $s(t)$  précédent le signal obtenu en réponse de  $\frac{E_m}{2} \cos(2\omega t)$ , donc on trouve  $s(t) \simeq 0,9 \cos(\omega t - 0,47) + 0,35 \cos(2\omega t - \pi/4)$ .

Enfin, pour un signal périodique quelconque, on fait la même chose grâce à la décomposition de Fourier.

### 2.4.2 Avec le diagramme de Bode

On fait exactement comme avec la fonction de transfert sauf qu'au lieu de calculer gain et déphasage, on les mesure sur le graphe.

## 3 Etude de filtres classiques

### 3.1 Filtres classiques

#### 3.1.1 Passe-bas

On vient de voir dans la partie précédente un filtre passe-bas. Le polynôme du dénominateur étant de degré 1, nous avons étudié un filtre passe-bas du premier ordre.

#### 3.1.2 Passe-haut

Exemple RC en regardant R, RL avec L : vérifier les comportements limites.

Fonction de transfert :  $\underline{H}(\omega) = \frac{R}{R+j\frac{1}{C\omega}} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega} = \frac{jx}{1+jx}$  ou  $\underline{H}(\omega) = \frac{jL\omega}{R+jL\omega} = \frac{jx}{1+jx}$  en posant  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  ou  $\omega_0 = \frac{L}{R}$ . Il s'agit donc d'un filtre passe-haut du premier ordre.

Diagramme de Bode en gain : BF pente à +20 dB/décade (donc dérivateur), HF  $G_{dB} = 0$ . Diagramme de Bode en phase : BF  $\phi \rightarrow \pi/2$ , HF  $\phi \rightarrow 0$ .

#### 3.1.3 Passe-bande

Impossible à réaliser avec seulement deux dipôles. On prend un circuit RLC et on regarde la tension aux bornes de R.

Comportements limites : HF bobine = coupe-circuit donc  $i = 0$  et  $u_R = 0$ . BF, idem mais avec condensateur.

Fonction de transfert :  $\underline{H}(\omega) = \frac{R}{R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1+jQ(x-1/x)}$  en posant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

Il s'agit d'un filtre **du second ordre** puisque le dénominateur est un polynôme d'ordre 2.

Diagramme de Bode en gain :  $G_{dB}(x) = 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(x-1/x)^2}} \right)$  On a donc :

- $G_{dB}(x \ll 1) \simeq 20 \log x - 20 \log Q$ , donc pente positive à + 20 dB/décade (dérivateur) ;
- $G_{dB}(x \gg 1) \simeq -20 \log x - 20 \log Q$ , donc pente négative à - 20 dB/décade (intégrateur).

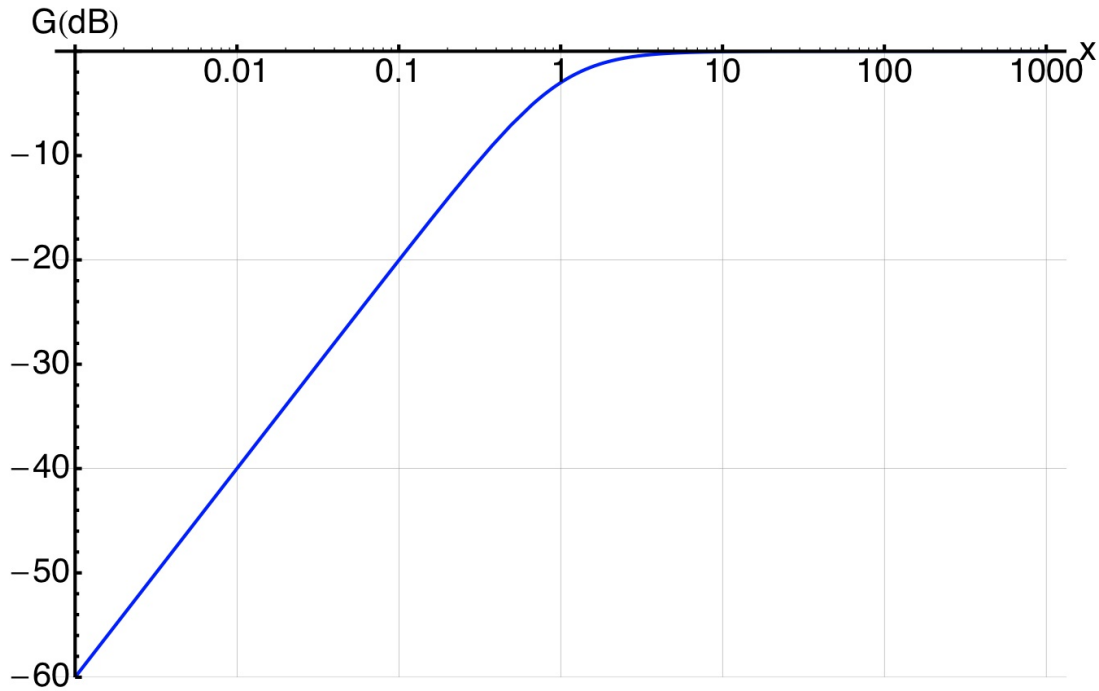


FIGURE 4 – Diagramme de Bode en gain d’un filtre passe-haut du premier ordre.

### 3.1.4 Coupe-bande

Circuit RLC et on regarde la tension aux bornes de LC.

Comportements aux limites : BF, condensateur = coupe circuit donc  $s(t) \rightarrow e(t)$ . HF, bobine = coupe circuit donc  $s(t) \rightarrow e(t)$ . Entre les deux, pulsation  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  telle que  $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$ , donc  $Z_{eq} = 0 : s(t) = 0$ .

Fonction de transfert :  $H = \frac{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{x - 1/x}{(x - 1/x) - \frac{j}{Q}} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1 - \frac{jx}{Q}}$

Diagramme de Bode en gain :  $G_{dB}(x) = 20 \log \left( \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2/Q^2 + (x^2 - 1)^2}} \right)$  On a donc :

- $G_{dB}(x \ll 1) \simeq 0$ , donc asymptote horizontale ;
- $G_{dB}(x \gg 1) \simeq 0$ , donc asymptote horizontale.

### 3.1.5 Déphaseur

Le circuit est composé de deux circuits RC séries montés en parallèle, l’un commençant par la résistance, l’autre par le condensateur. On mesure la tension entre les deux points centraux des branches.

On a alors :

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jx}{1 + jx} \\ V_2 &= \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jx} \\ V_2 - V_1 &= \frac{1 - jx}{1 + jx} \end{aligned}$$

On a donc  $G(x) = 1$ , donc  $G_{dB}(x) = 0$  et  $\phi(x) = -2\text{Arctan}(x)$  qui varie de 0 à  $-\pi$ .

### 3.1.6 Filtre passe-bas du second ordre

On a vu un filtre passe-bas du premier ordre, toutefois, pour ce filtre la décroissance du signal avec la fréquence se fait tout le temps avec une pente de -20 dB/décade, or on peut vouloir dans le cahier des charges que les fréquences hors de la bande passante soient atténuées beaucoup plus rapidement, par exemple, on peut souhaiter une atténuation d’un facteur 100 à chaque fois que l’on multiplie la fréquence par 10.

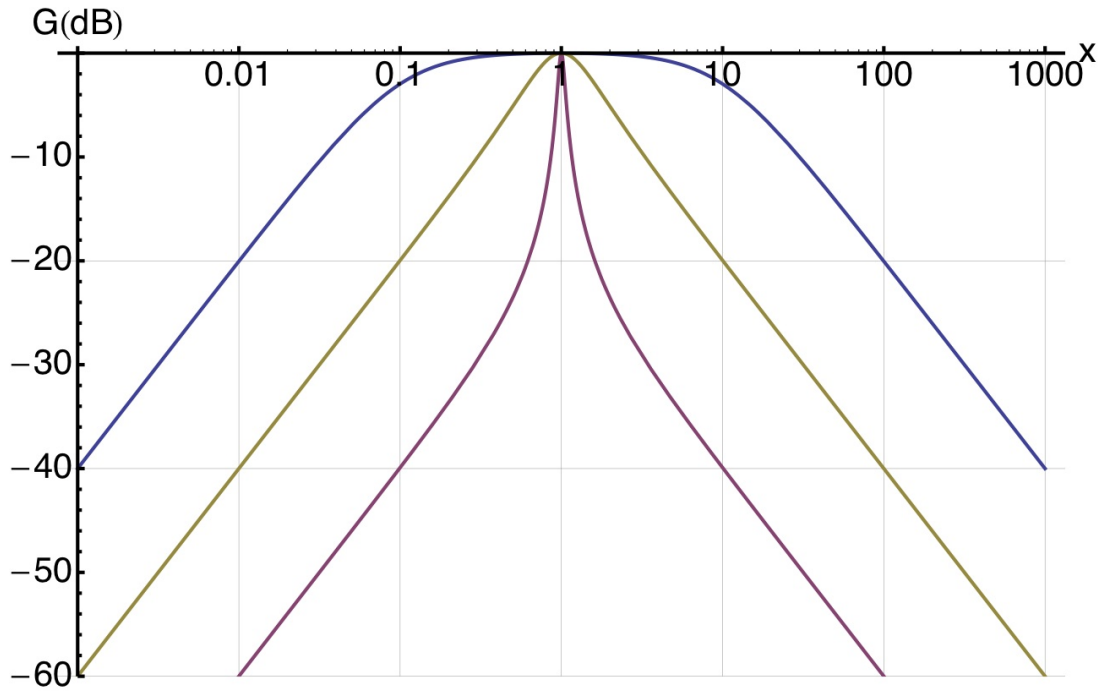


FIGURE 5 – Diagramme de Bode en gain d’un filtre passe-bande. La courbe bleue correspond à un facteur de qualité de 0,1, la courbe ocre à un facteur de qualité de 1 et la courbe rouge à un facteur de qualité de 10.

On peut alors réaliser un filtre passe-bas du second ordre, soit en associant plusieurs filtres du premier ordre, soit directement, par exemple avec la tension aux bornes d’un condensateur dans un circuit RLC série.

Comportement limite : HF, le condensateur est équivalent à un fil, donc  $s(t) \rightarrow 0$ , BF, le condensateur est équivalent à un coupe-circuit, on trouvera bien  $s(t) \rightarrow e(t)$ . Est-ce que le cahier des charges sur l’atténuation est respecté ?

Fonction de transfert :  $\underline{H} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{(1-x^2) + \frac{jx}{Q}}$  en posant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ . On a donc bien réalisé un filtre du second ordre.

$$\text{Diagramme de Bode en gain : } G_{dB} = 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}} \right) = -10 \log((1-x^2)^2 + x^2/Q^2).$$

- BF :  $x \ll 1$ ,  $G_{dB} = 0$  ;
- HF :  $x \gg 1$ ,  $G_{dB}(x) \simeq -40 \log x$ , donc on a une pente de - 40 dB/décade, comme demandé par le cahier des charges.

On peut regarder de plus la valeur en  $x = 1$  :  $G_{dB}(x = 1) = 20 \log Q$ . Ainsi, lorsque  $Q > 1$ ,  $G_{dB}(x = 1) > 0$ , on a réalisé un filtre **résonant**. En pratique, on va la plupart du temps vouloir éviter cette résonance pour avoir une courbe qui ressemble à un filtre passe-bas du premier ordre pour les basses fréquences (réponse plate aux basses fréquences) avec une décroissance plus rapide aux hautes fréquences. On choisit donc une valeur de  $Q \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

### 3.2 Gabarit d’un filtre

On vient de voir que selon le cahier des charges, on va être amené à choisir des filtres différents. L’opération qui permet de choisir le filtre adapté s’appelle la détermination du **gabarit du filtre**.

Pour réaliser un gabarit, il faut déterminer :

- une **zone conservée** : dans la bande-passante, le gain doit être supérieur à une valeur minimale  $G_{min}$  (et éventuellement inférieur à une valeur maximale  $G_{max}$ ) ;
- une **zone supprimée** : dans la bande rejetée, le gain doit être inférieur à une valeur  $G_{att}$

Exemple : on souhaite éliminer les ultrasons d’un signal audio. On va donc souhaiter un gain supérieur à -3 dB pour la bande audible (de 0 à 20 kHz), et que l’atténuation des signaux de fréquence supérieure à 40 kHz soit supérieure à 10 dB.

Dessin du gabarit. On montre qu’un filtre passe-bas du premier ordre avec une fréquence de coupure à 20 kHz ne convient pas (atténuation trop faible dans la bande rejetée). Le calcul de la pente minimale d’un filtre acceptable donne une pente de - 23 dB/décade : un filtre du premier ordre ne pourra pas marcher.



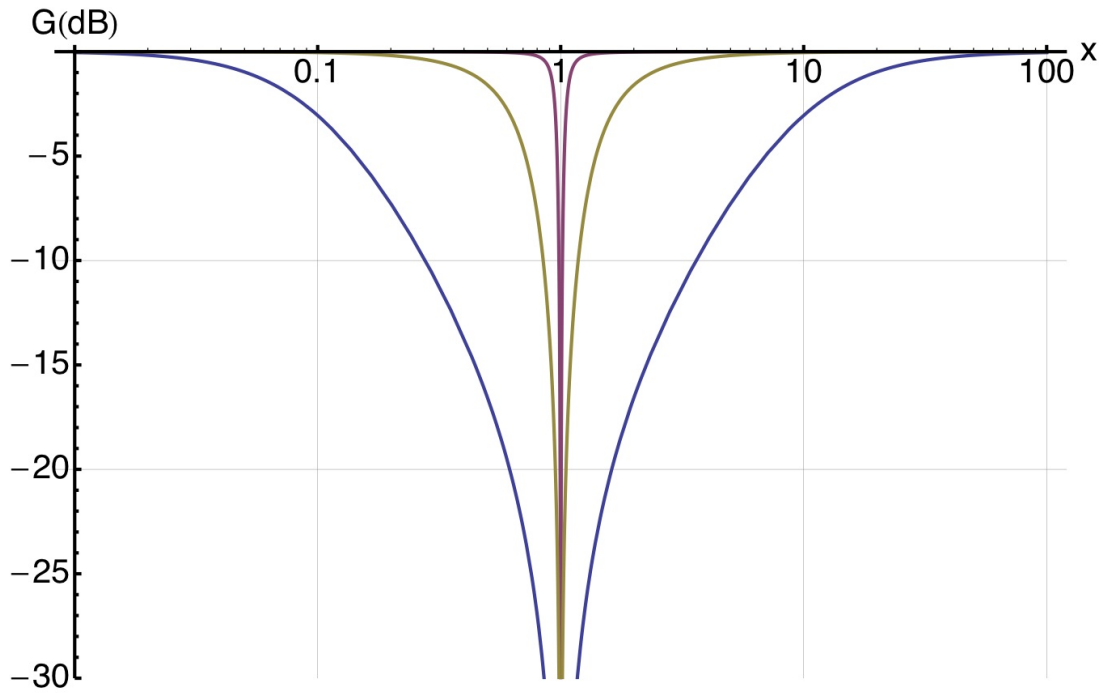


FIGURE 6 – Diagramme de Bode en gain d’un filtre coupe-bande. La courbe bleue correspond à un facteur de qualité de 0,1, la courbe ocre à un facteur de qualité de 1 et la courbe rouge à un facteur de qualité de 10.

### 3.3 Filtres en cascade

Un manière intuitive de réaliser un filtre du second ordre est l’association en cascade de deux filtres du premier ordre : si en multipliant la fréquence par dix, chaque filtre diminue le gain d’un facteur 10, les deux filtres ensemble diminueront le gain d’un facteur 100.

On peut vérifier cette idée avec deux passes bas du premier ordre RC, mais il y a alors un problème : on ne trouve pas  $\underline{H} = \frac{1}{(1+jx)^2}$  mais  $\underline{H} = \frac{1+jx}{1-x^2+3jx}$ , et la pente est toujours de - 20 dB/décade.

C’est une nouvelle illustration du problème d’adaptation d’impédance que l’on a déjà vu : on ne peut faire une étude en blocs de quadripôles uniquement s’il n’y a aucun courant qui "fuit" du quadripôle "amont" vers le quadripôle "aval", sinon, le comportement du quadripôle amont change entre l’étude à vide (sans quadripôle aval) et l’étude en charge (avec le deuxième quadripôle).

En terme d’impédance, il faut que l’impédance de sortie du premier quadripôle soit très inférieur à l’impédance d’entrée du second :  $Z_{s,1} \ll Z_{e,2}$ .

Si jamais cette condition n’est pas validée, on peut utiliser un montage suiveur, par exemple avec un amplificateur linéaire intégré. Schématiquement, un montage suiveur est un filtre de gain constant égal à 1, de déphasage nul, avec une impédance d’entrée infinie et une impédance de sortie nulle.

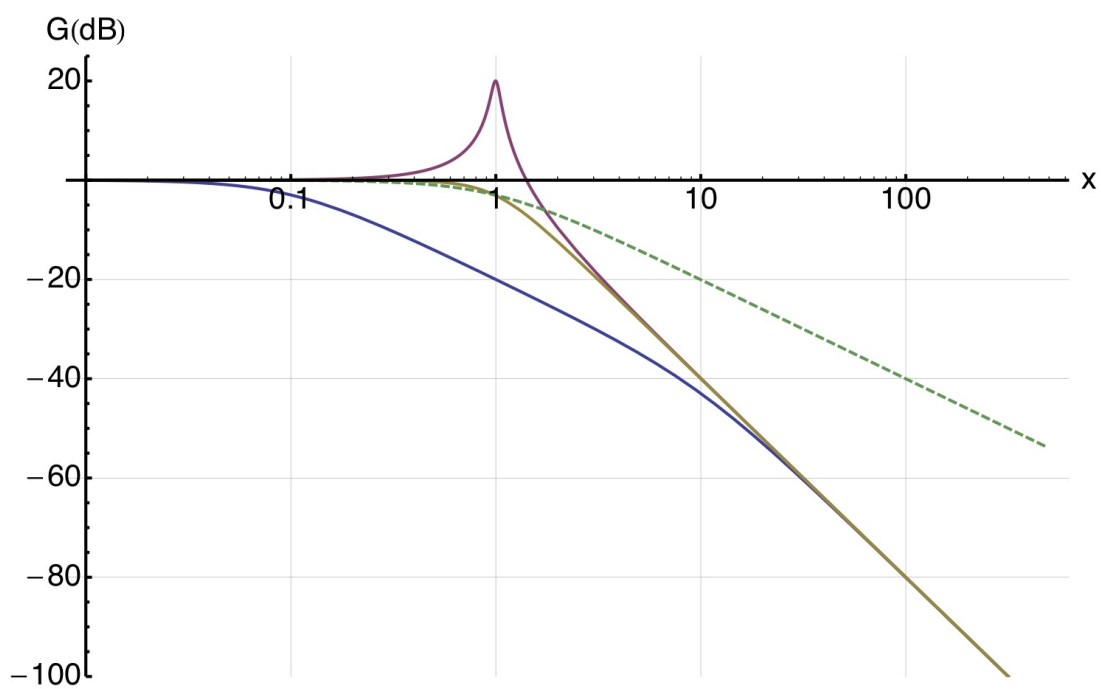


FIGURE 7 – Diagramme de Bode en gain d’un filtre passe-bas du second ordre. La courbe bleue correspond à un facteur de qualité de 0,1, la courbe ocre à un facteur de qualité de  $1/\sqrt{2}$  et la courbe rouge à un facteur de qualité de 10. La courbe en pointillés est celle du filtre passe-bas du premier ordre pour comparaison.