

# PHYSIQUE 5

## COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UN SYSTÈME AU VOISINAGE D'UNE POSITION D'ÉQUILIBRE STABLE. RÉPONSE À UNE EXCITATION.

### Expériences

- ☞ Oscillateur harmonique mécanique et électrique
- ☞ Oscillateur amorti mécanique et électrique

### Table des matières

<b>I</b>	<b>Oscillateur harmonique</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Mise en équation de l'oscillateur harmonique</b>	<b>4</b>
1.1	Cas du circuit LC . . . . .	4
1.1.1	Circuit et conditions initiales . . . . .	5
1.1.2	Mise en équation . . . . .	5
1.2	Système masse ressort . . . . .	6
1.2.1	Rappels de mécanique . . . . .	6
1.2.2	Mise en équation . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Résolution</b>	<b>7</b>
2.1	Cas du circuit LC . . . . .	8
2.2	Cas du système masse-ressort . . . . .	8
2.3	Analogie . . . . .	9
2.4	Etude énergétique . . . . .	9
2.4.1	Cas du circuit LC . . . . .	9
2.4.2	Cas du système masse-ressort . . . . .	10

<b>3</b>	<b>Adaptation des résultats à d'autres situations</b>	<b>10</b>
3.1	Changement des conditions initiales . . . . .	10
3.2	Système masse-ressort vertical . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Portraits de phase</b>	<b>11</b>
4.1	Cas du système masse-ressort horizontal . . . . .	12
4.2	Cas du circuit LC . . . . .	12
4.3	Masse-ressort vertical . . . . .	12
<b>II</b>	<b>Oscillateur amorti</b>	<b>13</b>
<b>1</b>	<b>Approche expérimentale</b>	<b>13</b>
1.1	Système mécanique . . . . .	13
1.1.1	Expérience . . . . .	13
1.1.2	Simulation . . . . .	13
1.1.3	Influence des paramètres . . . . .	14
1.1.4	Tracé du portrait de phase approximatif . . . . .	14
1.2	Electricité : circuit RLC . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Etude quantitative</b>	<b>15</b>
2.1	Système mécanique . . . . .	15
2.1.1	Mise en équation . . . . .	15
2.1.2	Forme canonique . . . . .	16
2.2	Circuit RLC . . . . .	16
2.2.1	Mise en équation . . . . .	17
2.2.2	Forme canonique . . . . .	17
2.3	Solutions . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Etude de cas concrets</b>	<b>19</b>
3.1	Masse-ressort vertical dans la glycérine . . . . .	20
3.2	Charge d'un circuit RLC . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Durée du régime transitoire</b>	<b>21</b>
4.1	Régime pseudo-périodique . . . . .	22
4.2	Régime apériodique . . . . .	22

4.3	Régime critique . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Bilan énergétique</b>	<b>22</b>
5.1	Modèle mécanique . . . . .	22
5.2	Modèle électrique . . . . .	23
5.3	Analogie . . . . .	24
<b>III</b>	<b>Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé</b>	<b>24</b>
<b>1</b>	<b>Modélisation et approche de la résonance</b>	<b>24</b>
1.1	Définition . . . . .	25
1.2	Bilan énergétique . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Résolution avec les complexes</b>	<b>28</b>
2.1	Utilisation . . . . .	28
2.2	Résonance en vitesse . . . . .	30
2.2.1	Résolution . . . . .	30
2.2.2	Allure et interprétation . . . . .	31
2.2.3	Bande passante . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Résonances en électricité</b>	<b>32</b>
3.1	Circuit étudié et outils . . . . .	32
3.1.1	Circuit . . . . .	32
3.1.2	Outil complexe en électricité . . . . .	33
3.1.3	Impédances usuelles . . . . .	33
3.2	Résonance en intensité . . . . .	34
3.2.1	Résolution . . . . .	34
3.2.2	Allure et interprétation . . . . .	35
3.3	Résonance en tension . . . . .	35

On va dans ce chapitre étudier comment un système mécanique ou électrique évolue à proximité d'une position d'équilibre stable, et en particulier comment s'effectue le retour à l'équilibre. Dans la première partie, nous allons étudier le modèle le plus simple caractérisant un tel système : l'oscillateur harmonique, et nous verrons que ce modèle peut s'appliquer à un système masse-ressort, ou bien à un circuit LC. Toutefois, ce système montre la présence d'oscillations mais à cause de l'absence de phénomènes dissipant l'énergie, les oscillations dans un tel système sont tout le temps de la même amplitude, et donc ne s'arrêtent jamais. Nous verrons donc dans la deuxième partie comment ces termes dissipatifs d'énergie peuvent être pris en compte. Enfin, dans un dernier temps, nous verrons comment un tel système peut-être mis en œuvre dans un système plus complexe afin de réaliser des fonctions de filtrage qui permettent de faire de l'analyse spectrale ou de choisir un fonctionnement de système mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc).

## Première partie

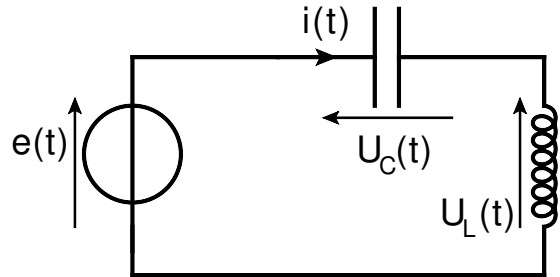
# Oscillateur harmonique

## 1 Mise en équation de l'oscillateur harmonique

### 1.1 Cas du circuit LC

### 1.1.1 Circuit et conditions initiales

On étudie un circuit composé d'un condensateur de capacité  $C$  et d'une bobine d'inductance  $L$  en série branchés sur une alimentation idéale  $E$  que l'on éteint à  $t = 0$  (en fait on bascule un interrupteur pour mettre le circuit LC en court-circuit sans avoir la résistance interne du générateur). Avant l'extinction de l'alimentation, on est en régime permanent, donc le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine à un fil.



On a donc à  $t < 0$ ,  $u_L(t < 0) = 0$ ,  $u_c(t < 0) = E - u_l = E$ ,  $i(t < 0) = 0$ .

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur  $u_c(t = 0^+) = u_c(t = 0^-) = E$  et par continuité du courant qui traverse la bobine  $i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0$ . Nous allons voir lors de la résolution que nous avons besoin de ces deux conditions initiales.

### 1.1.2 Mise en équation

Aux instants  $t > 0$ , nous avons les relations :

$$\begin{aligned} \text{Loi des mailles : } & u_c + u_l = 0 \\ \text{condensateur : } & i = C \frac{du_c}{dt} \\ \text{bobine : } & u_L = L \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

On obtient donc l'équation différentielle :

$$u_c + LC \frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants sans

second membre. La forme canonique de cette équation est :

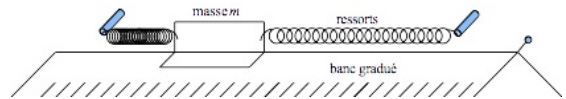
$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \omega_0^2 u_c = 0.$$

On peut donc mettre cette équation sous la forme canonique en posant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Il s'agit de l'équation canonique d'un oscillateur harmonique,  $\omega_0$  est la pulsation propre de l'oscillateur (en  $s^{-1}$ ).

*Avant d'effectuer la résolution, nous allons voir comment obtenir une équation différentielle d'oscillateur harmonique en mécanique, pour montrer la généralité des phénomènes observés.*

## 1.2 Système masse ressort

On considère un système composé d'une masse  $m$  reliée à un ressort de constante de raideur  $k$  et astreinte à se déplacer horizontalement et sans frottements.



### 1.2.1 Rappels de mécanique

Le mouvement d'un système mécanique est lié aux forces qu'il subit par le **principe fondamental de la dynamique** (PFD), selon lequel  $m\vec{a} = \Sigma\vec{F}$ . On verra au cours du deuxième semestre la signification précise de chaque terme et quelles hypothèses ont été faites pour arriver à ce résultat.

Ici,  $\vec{a}$  est l'accélération de la masse, et  $\Sigma\vec{F}$  est la somme des forces qui s'exercent sur la masse.

L'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, donc  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 O\vec{M}}{dt^2}$  en appelant  $O$  l'origine du repère et  $M$  la position de la masse.

On va se contenter ici d'étudier le mouvement le long de l'axe horizontal que nous appellerons axe  $Ox$ , et nous allons suivre le mouvement de la masse caractérisé par sa position  $x$ . Alors  $a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}$ .

Pour les forces, nous ne devons considérer que les forces qui s'exercent le long de l'axe  $Ox$ , ce qui exclut le poids et la réaction exercée par le rail (il n'y a pas de frottements). Il ne reste donc que la force exercée par le ressort et nous avons vu dans le premier TP de l'année qu'elle peut se mettre sous la forme  $F = k(l - l_0)$  où  $k$  est la constante de raideur du ressort,  $l$  sa longueur, et  $l_0$  sa longueur à vide (quand il n'est ni étiré ni comprimé).

## 1.2.2 Mise en équation

Il faut maintenant spécifier où prendre l'origine de l'axe  $Ox$ . On va prendre comme origine la position d'équilibre, donc quand  $a_x = 0$ , c'est à dire quand  $l = l_0$ . Pour l'orientation, il va falloir faire attention aux signes : quand le ressort est comprimé (donc quand  $l < l_0$  donc quand  $x = l - l_0 < 0$ ), le ressort "pousse" la masse vers la position d'équilibre, donc vers les  $x$  croissant. A l'inverse, quand  $x > 0$ , le ressort est étiré et la masse est rappelée vers les  $x$  décroissant. La force exercée par le ressort est donc  $F = -kx$ .

L'équation du PFD devient donc :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx,$$

que l'on peut mettre sous la forme canonique en posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Pour les conditions initiales, elles dépendront de la situation considérée, mais on peut imaginer avoir décalé la masse de sa position d'équilibre et la lâcher sans vitesse initiale  $x(t = 0^+) = x_0$ ,  $v(t = 0^+) = 0$ .

## 2 Résolution

L'équation que l'on doit résoudre est un équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre  $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0$ .

Les solutions de cette équation sont à connaître par cœur et sont de la forme :

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Il y a maintenant deux constantes à déterminer, ce qui est généralement le cas pour les équations du second ordre. C'est pour cette raison qu'il nous faut spécifier

deux conditions initiales.

Il est aussi possible d'exprimer  $y(t) = A' \cos(\omega_0 t + \phi)$  ou  $y(t) = A' \sin(\omega_0 t + \phi')$ .

Ces deux expressions permettent de voir que la solution est un signal sinusoïdal de pulsation  $\omega_0$  et de donner directement l'amplitude  $A'$  du signal et sa phase initiale  $\phi$ . Les deux constantes à déterminer sont dans ce cas là  $A'$  et  $\phi$  (ou  $\phi' = \phi + \pi/2$ ).

On a les relations  $A = A' \cos \phi$  et  $B = -A' \sin \phi$  obtenues avec la relation de trigonométrie usuelle  $\cos a + b = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ .

## 2.1 Cas du circuit LC

On a donc  $u_c(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  avec les conditions initiales  $u_c(t = 0^+) = E$  et  $i(t = 0^+) = 0$ . La première condition initiale fixe la valeur de  $A = E$ . La deuxième condition initiale porte sur  $i$  et non sur  $u_c$ . Pour passer de l'un à l'autre, et avoir une condition initiale qui porte sur la fonction que l'on étudie  $u_c$ , on utilise la relation qui lie les deux pour un condensateur  $i = C \frac{du_c}{dt}$ .

On en déduit la deuxième condition initiale  $\frac{du_c}{dt}(t = 0^+) = 0$ . De manière générale, pour une équation différentielle du deuxième ordre, il nous faut la valeur de la fonction recherchée et de sa dérivée à un instant donné.

Cette deuxième condition fixe  $B = 0$ , on obtient donc :

$$u_c(t > 0) = E \cos(\omega_0 t).$$

ainsi que le courant :

$$i(t > 0) = C \frac{du_c}{dt} = -CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

## 2.2 Cas du système masse-ressort

On doit avoir  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  avec les conditions initiales  $x(t = 0^+) = x_0$  et  $v(t = 0^+) = 0$ .

On a donc  $A = x_0$  et  $\frac{dx}{dt}(t = 0^+) = 0$  qui est la deuxième condition initiale pour  $x$ . On déduit  $B = 0$  et :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t),$$

et :

$$v(t) = -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t).$$



## 2.3 Analogie

On voit après résolution que les deux systèmes présentent la même évolution temporelle. On aurait pu s'épargner la résolution du deuxième système si on avait établi une analogie entre les deux problèmes en identifiant :

Masse-ressort    Circuit LC

$m$	$L$
$k$	$\frac{1}{C}$
$v$	$i$
$x$	$q$
$kx$	$u_c$

On va voir plus loin que l'on peut traiter intégralement le problème mécanique avec cette analogie, en étudiant à l'oscilloscope le circuit électrique : on peut alors observer la solution, même si on n'a pas d'ordinateur pour résoudre le problème (par exemple : oscillateur de Van der Pol, équation différentielle non linéaire).

## 2.4 Etude énergétique

### 2.4.1 Cas du circuit LC

A tout instant  $t$  on peut déterminer l'énergie stockée dans le condensateur  $E_C = \frac{1}{2}Cu_c(t)^2$  et celle emmagasinée dans la bobine  $E_L = \frac{1}{2}Li(t)^2$ .

On trouve donc les valeurs respectives :

$$E_c(t) = \frac{CE^2}{2} \cos^2(\omega_0 t)$$

$$E_L(t) = \frac{LC^2\omega_0^2 E^2}{2} \sin^2(\omega_0 t) = \frac{CE^2}{2} \sin^2(\omega_0 t)$$

On observe donc que l'énergie stockée dans le condensateur à l'état initial est transformée en énergie stockée dans la bobine, puis à nouveau stockée dans le condensateur et ce indéfiniment.

On observe de plus la conservation de l'énergie puisqu'il n'y a pas d'énergie dissipée par effet Joule :  $E_c(t) + E_L(t) = \frac{CE^2}{2} = cte$ .

## 2.4.2 Cas du système masse-ressort

On peut réutiliser l'analogie entre les deux systèmes que l'on a vu.

L'équivalent de  $E_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)$  devient alors  $\frac{1}{2}mv(t)^2$ . On reconnaît l'énergie cinétique de la masse.

L'équivalent de  $E_C(t)$  est lui  $\frac{1}{2}kx^2$ . Il s'agit en réalité de l'énergie stockée dans le ressort lorsqu'on le comprime ou l'étire : on parle d'**énergie élastique**. Cette énergie potentielle stockée dans le ressort peut alors être convertie en énergie cinétique.

Ce que l'on observe alors est la **conservation de l'énergie mécanique** : en l'absence de phénomènes dissipatifs, la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles est une constante.

En particulier ici :

$$E_{cin} = \frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t) = \frac{kx_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t)$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}kx(t)^2 = \frac{kx_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t)$$

On a donc bien  $E_{cin} + E_{pot} = \frac{kx_0^2}{2} = cte$ .

## 3 Adaptation des résultats à d'autres situations

On peut adapter les résultats directement à deux autres situations dans le cas du système masse-ressort.

### 3.1 Changement des conditions initiales

Si au lieu de lâcher la masse sans vitesse initiale, on peut imaginer lui transmettre une impulsion de vitesse  $v_0$  lorsqu'elle est à l'équilibre  $x = 0$ .

Les conditions initiales sont donc  $x(t = 0^+) = 0$  et  $\frac{dx}{dt}(t = 0^+) = v_0$ .

La résolution donne une fois de plus  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ . La première condition initiale donne  $A = 0$ , la seconde donne  $\omega_0 B = v_0$ .

On peut donc écrire :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

et :

$$v(t) = v_0 \cos(\omega_0 t).$$

## 3.2 Système masse-ressort vertical

Si on considère le même système masse-ressort, mais qu'on le place le long de la verticale, on s'attend à ce que la pesanteur joue un rôle.

Toutefois, par analyse dimensionnelle, il n'est possible de créer qu'une seule pulsation avec  $m$ ,  $k$  et  $g$  :

$$[m^\alpha k^\beta g^\gamma] = kg^\alpha (N.m^{-1})^\beta (m.s^{-2})^\gamma = kg^{\alpha+\beta} . m^\gamma . s^{-2\gamma-2\beta} = s^{-1}$$

fixe les conditions  $\alpha = -1/2$ ,  $\beta = 1/2$  et  $\gamma = 0$ , donc  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

On va donc avoir la même équation différentielle, le changement étant dans le second membre : en régime permanent, le ressort va être allongé à cause de la masse qui lui est accrochée. La nouvelle position d'équilibre est donc  $z_{eq}$  telle que la force exercée par le ressort compense le poids :  $kz_{eq} = mg$ .

On peut donc déduire l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 \frac{mg}{k}$$

On va donc observer des oscillations à la même pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  que le ressort soit horizontal ou vertical, autour d'une position d'équilibre qui au lieu d'être à la longueur à vide pour le cas horizontal passe à la longueur  $l = l_0 + \frac{mg}{k}$  dans le cas vertical.

## 4 Portraits de phase

Un outil graphique très pratique pour étudier un système dynamique est le **portrait de phase**. Il consiste à tracer la courbe  $v(x)$ , contrairement au tracé de  $x(t), v(t)$ .

## 4.1 Cas du système masse-ressort horizontal

Lors de la résolution on a trouvé :

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 \cos(\omega_0 t) \\v(t) &= -\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t)\end{aligned}$$

On a la relation  $x^2 + \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2 = x_0^2$ , donc la courbe est une ellipse. Une manière de la tracer est regarder quelques instants particuliers  $t = 0, \frac{\pi}{2\omega_0}, \dots$

On trouve donc une ellipse centrée sur l'origine du repère, d'extension horizontale  $x_0$  et d'extension verticale  $x_0\omega_0$ .

Le sens de parcours de l'ellipse est toujours le même : quand on est dans la partie supérieure du tableau,  $v > 0$ , donc  $x$  est croissant, on va de gauche à droite. A l'inverse, dans le demi-plan  $v < 0$ , on va de droite à gauche.

Dans un portrait de phase, les courbes sont parcourues dans le sens des aiguilles d'une montre.

Ici, les courbes du portrait de phase sont fermées : le mouvement est **périodique**.

## 4.2 Cas du circuit LC

On trace alors  $\frac{du_c}{dt} = f(u_c)$ . On obtient alors le même portrait de phase que dans le cas précédent (c'est logique vu l'analogie que l'on a tracée entre les deux systèmes !)

## 4.3 Masse-ressort vertical

On observe toujours la même ellipse. La seule différence avec le cas horizontal sera le centre de l'ellipse : il sera en  $x_{eq} = \frac{mg}{k}$  au lieu d'être en 0.

On vient donc de voir que la modélisation d'un amortisseur de voiture par un système masse-ressort n'est pas satisfaisante : on observerait indéfiniment des oscillations autour de la position d'équilibre, à cause de la conversion de l'énergie cinétique en énergie potentielle et inversement. Il est donc nécessaire d'introduire un élément dissipatif dans notre étude : c'est le modèle de l'oscillateur harmonique amorti.

## Deuxième partie

# Oscillateur amorti

## 1 Approche expérimentale

### 1.1 Système mécanique

#### 1.1.1 Expérience

Si on modifie le flux d'air servant à diminuer les frottements de la masse sur le banc on observe plusieurs types de régimes :

- si les frottements sont faibles : on observe plusieurs oscillations de la masse, avec tout de même une amplitude qui décroît avec le temps. On parle de **régime pseudo-périodique** ;
- si on augmente les frottements, le nombre d'oscillations diminue ;
- si les frottements sont plus élevés : la masse s'arrête dès qu'elle passe pour la première fois à la position d'équilibre. On parle de **régime apériodique**.

#### 1.1.2 Simulation

Sur la simulation disponible [ici](#), on peut faire les différents paramètres du problème afin de voir le comportement de chacun d'eux. Il s'agit de l'oscillateur vu

précédemment (masse+ressort) auquel on ajoute la prise en compte des frottements fluides. Ces frottements sont modélisés par une force proportionnelle à la vitesse  $\vec{F} = -h\vec{v}$ , où  $h$  s'exprime en  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$  et dépend de la forme de l'objet, de son état de surface et du fluide exerçant les frottements.

Si on prend une valeur de l'écartement initial donnée, et une valeur de la constante de raideur  $k$ , alors lorsque l'on augmente la valeur de  $h$ , on voit bien le système passer du régime pseudo-périodique au régime apériodique (le régime à la limite entre les deux est le **régime critique**).

Dans les trois cas, on aboutit au même régime permanent : contrairement à l'oscillateur harmonique, il y a ici comme pour les systèmes du premier ordre un régime transitoire qui amène à un régime permanent.

### 1.1.3 Influence des paramètres

On peut voir sur la simulation que  $m$  et  $k$  change la valeur de la période des oscillations en régime pseudo-périodique (la **pseudo-période**).

$m$  a aussi une influence sur la durée du régime transitoire (même si l'influence est moins visible hors du régime pseudo-périodique).

$h$  influe aussi sur la durée du transitoire : plus il est grand plus il est important. La transition entre régime pseudo-périodique et apériodique ne s'effectue pas à  $h$  fixé puisque pour une valeur de  $h$ , en variant la masse on peut voir les deux phénomènes (on peut montrer de même que la limite dépend aussi de  $k$ ).

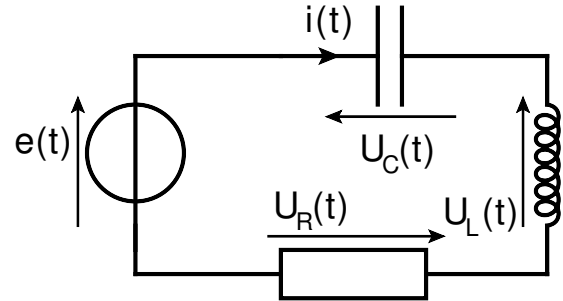
### 1.1.4 Tracé du portrait de phase approximatif

On prend comme CI  $x_0 = 2$  et  $v_0 = 0$  et on trace les portraits de phase pour différents régimes (pseudo périodique très peu amorti, pseudo périodique amorti, apériodique). Pour les régimes pseudo-périodique, quand on a fini la première ellipse de l'OH, on se retrouve un peu plus près du centre de l'ellipse qu'au départ : petit à petit, on se rapproche du centre (centre attractif) avec une courbe en escargot. En régime apériodique, plus d'oscillations, à la limite, régime critique.

Sur la simulation disponible [ici](#) on peut visualiser de tels portraits de phase.

## 1.2 Electricité : circuit RLC

On étudie un circuit composé d'un condensateur de capacité  $C$  et d'une bobine d'inductance  $L$  et d'une résistance  $R$  en série branchés sur une alimentation  $E$  que l'on éteint à  $t = 0$ . Avant l'extinction de l'alimentation, on est en régime permanent, donc le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine à un fil. On a donc à  $t < 0$ ,  $u_L(t < 0) = 0$ ,  $i(t < 0) = 0$  donc  $u_R(t < 0) = Ri(t < 0) = 0$  et  $u_c(t < 0) = E - u_L - u_R = E$ .



On peut alors faire varier les paramètres pour observer les différents régimes. On peut reprendre l'analogie précédente et l'enrichir : la résistance est l'analogie du coefficient  $h$  pour les frottements fluides.

*On vient donc de voir que l'on pouvait dégager plusieurs régimes. On va maintenant essayer de prédire quel sera le régime d'un système, quel paramètre pourra le faire passer d'un régime à l'autre et on va essayer d'estimer la durée du régime transitoire.*

## 2 Etude quantitative

### 2.1 Système mécanique

#### 2.1.1 Mise en équation

On applique à nouveau le PFD que l'on projette sur l'axe  $x$  en incluant en plus les forces de frottements modélisée par  $\vec{F}_{fr} = -h\vec{v}$ . On obtient alors en posant  $x$  l'allongement  $l - l_0$  :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - h \frac{dx}{dt},$$

que l'on met sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

On voit bien qu'en l'absence de frottements  $h = 0$ , on retrouve l'oscillateur harmonique. Le terme devant la dérivée première représente l'amortissement.

## 2.1.2 Forme canonique

On met cette équation différentielle sous la forme canonique :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

en posant :

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  comme dans le cas de l'oscillateur harmonique la pulsation propre ;
- $Q = \frac{\omega_0 m}{h} = \frac{\sqrt{km}}{h}$  le **facteur de qualité**, sans dimension. Plus le facteur de qualité est grand, moins il y a d'amortissement ( $h \rightarrow 0$ ).

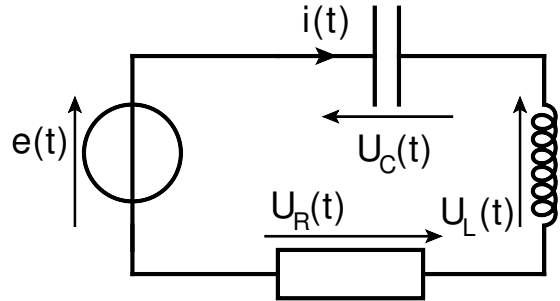
La forme canonique utilisée en SI est  $\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0} \frac{dx}{dt} + x = 0$ , qui est équivalente en posant  $m = \frac{1}{2Q}$  le facteur d'amortissement.

## 2.2 Circuit RLC



## 2.2.1 Mise en équation

On étudie un circuit composé d'un condensateur de capacité  $C$ , d'une résistance  $R$  et d'une bobine d'inductance  $L$  en série branchés sur une alimentation idéale  $E$  que l'on éteint à  $t = 0$ . Avant l'extinction de l'alimentation, on est en régime permanent, donc le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine à un fil. On a donc à  $t < 0$ ,  $u_L(t < 0) = 0$ ,  $i(t < 0) = 0$ ,  $u_R(t < 0) = Ri(t < 0) = 0$  et  $u_c(t < 0) = E - u_L - u_R = E$ ,



Par continuité de la tension aux bornes du condensateur  $u_c(t = 0^+) = u_c(t = 0^-) = E$  et par continuité du courant qui traverse la bobine  $i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0$ . Nous allons voir lors de la résolution que nous avons besoin de ces deux conditions initiales.

Aux instants  $t > 0$ , nous avons les relations :

$$\text{Loi des mailles : } u_c + u_L + u_R = 0$$

$$\text{condensateur : } i = C \frac{du_c}{dt}$$

$$\text{bobine : } u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$\text{Loi d'Ohm : } u_R = Ri$$

On obtient donc l'équation différentielle :

$$u_c + LC \frac{d^2u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} = 0$$

## 2.2.2 Forme canonique

On met cette équation différentielle sous la forme canonique :

$$\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = 0,$$

en posant :

- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  comme dans le cas de l'oscillateur harmonique la pulsation propre ;
- $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$  le **facteur de qualité**, sans dimension. Plus le facteur de qualité est grand, moins il y a d'amortissement ( $R \rightarrow 0$ ).

## 2.3 Solutions

Nous observons donc une fois de plus que la résolution d'un des deux problèmes donne la solution de l'autre : c'est tout l'intérêt de l'analogie entre différents modèles.

Cherchons une solution générale de l'équation différentielle sans second membre :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0.$$

sous la forme  $y(t) = Ae^{rt}$ .

Alors en effectuant les dérivations on trouve que les valeurs de  $A$  et surtout  $r$  doivent vérifier :

$$\left( r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 \right) Ae^{rt} = 0$$

ce qui revient à trouver les racines du polynôme du second degré. On obtient alors plusieurs cas selon les racines de ce polynôme :

- le polynôme a deux racines réelles, elles sont alors forcément négatives et on peut les noter  $-r_1$  et  $-r_2$  (avec  $r_1$  et  $r_2$  positifs) et la solution s'écrira  $y(t) = Ae^{-r_1 t} + Be^{-r_2 t}$ . On n'observe alors pas d'oscillations, on est dans le cas du régime **apériodique**.
- le polynôme n'a pas de racines réelles mais donc deux racines complexes conjuguées de partie réelle négative. On peut les noter  $-\lambda \pm i\omega$  et les solutions se mettent sous la forme :

$$y(t) = (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}) e^{-\lambda t} = A' \cos(\omega t + \phi) e^{-\lambda t}$$

On est donc bien dans le cas du régime pseudo-périodique, avec une pseudo-pulsation  $\omega$  et une décroissance exponentielle de l'enveloppe en  $e^{-\lambda t}$ .

- enfin le cas d'une racine réelle double négative  $-\omega_0$  a pour solution  $y(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$ . Il s'agit du régime **critique** qui sépare les deux autres régimes.

La résolution et les solutions ne sont pas à connaître, mais on obtient les résultats suivants (il faut connaître la nature du régime en fonction de la valeur du facteur de qualité).

- Si  $Q > 1/2$ , alors on est dans le régime **pseudo-périodique** (peu d'amortissement). La solution s'écrit alors :

$$y(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)),$$

avec les valeurs  $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$  et  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ . On observe donc bien des pseudo-oscillations à la pseudo-pulsation  $\omega$  à l'intérieur d'une enveloppe exponentiellement décroissante.

Lorsque  $Q \gg 1$  (en pratique  $Q > 2$  suffit!),  $\omega \simeq \omega_0$  : les pseudo-oscillations se font à la même pulsation (et donc même fréquence) que l'oscillateur non amorti.

- Si  $Q < 1/2$ , alors on est dans le régime **apériodique**. La solution est alors :

$$y(t) = e^{-\lambda t} (Ae^{\omega' t} + Be^{-\omega' t}),$$

avec les valeurs  $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$  et  $\omega' = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$ . On observe alors une solution décroissante ( $\omega' - \lambda < 0$ ), et les conditions initiales sont fixées par  $y(0)$  et  $\frac{dy}{dt}(t=0)$ .

- Si  $Q = 1/2$ , il s'agit du régime **critique**. La solution est alors :

$$y(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}.$$

Là encore, l'allure de la solution est décroissante, et les CI fixent les valeurs de A et B.

### 3 Etude de cas concrets

### 3.1 Masse-ressort vertical dans la glycérine

On considère une masse  $m = 100$  g plongée dans de la glycérine et suspendue verticalement à un ressort de constante de raideur  $k = 3,47$  N/m. Dans la glycérine, le coefficient de frottement est  $h = 2,50$  kg/s.

En appliquant le PFD et le projetant sur l'axe vertical on obtient alors l'équation (on prend pour origine la position  $z = 0$  où la longueur du ressort est sa longueur à vide) :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -(m - m')g - kz - h \frac{dz}{dt}$$

en notant  $m'$  la masse du volume de glycérine déplacé par la masse.

On écarte alors la masse de sa position d'équilibre  $z = z_0$  et on la lâche sans vitesse initiale  $\frac{dz}{dt}_0 = 0$ .

On peut alors mettre l'équation différentielle sous la forme canonique :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \left( \frac{m'}{m} - 1 \right) g,$$

en posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{\omega_0 m}{h} = \frac{\sqrt{km}}{h}$ .

On obtient donc comme valeur du facteur de qualité  $Q = 0,2$ . Le régime est alors un régime aperiodique, et connaissant les conditions initiales et le régime permanent on peut tracer l'allure approximative de l'allure de  $z(t)$  et du portrait de phase.

La solution s'obtient grâce aux conditions initiales et l'on obtient :

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left( A e^{\omega_0 t \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}} + B e^{-\omega_0 t \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}} \right) + z_{eq} \\ &= (z_0 - z_{eq}) e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left[ \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{1-4Q^2}}}{2} e^{\omega_0 t \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}} + \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-4Q^2}}}{2} e^{-\omega_0 t \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}} \right] + z_{eq} \\ &= (z_0 - z_{eq}) e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left[ \operatorname{ch} \left( \omega_0 t \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right) + \frac{1}{\sqrt{1-4Q^2}} \operatorname{sh} \left( \omega_0 t \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \right) \right] + z_{eq}. \end{aligned}$$

### 3.2 Charge d'un circuit RLC

On considère un circuit série constitué d'une résistance  $R = 10$   $\Omega$ , d'un condensateur de capacité  $C = 1,00$   $\mu\text{F}$  et d'une bobine d'inductance  $L = 10$  mH. A l'instant,  $t = 0$  on branche ce circuit préalablement déchargé sur une source idéale de tension

$E = 10,0 \text{ V}$ .

On obtient alors les équations suivantes :

$$\text{Loi des mailles : } u_c + u_L + u_R = E$$

$$\text{condensateur : } i = C \frac{du_c}{dt}$$

$$\text{bobine : } u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$\text{Loi d'Ohm : } u_R = Ri$$

On obtient donc l'équation différentielle :

$$u_c + LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} = E$$

que l'on met sous la forme canonique :

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E,$$

en posant  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$ .

Dans ce cas, on a alors un facteur de qualité qui vaut  $Q = 10$ , l'évolution se fera donc dans le régime pseudo-périodique. Les conditions initiales sont  $u_c = 0$  (continuité de la tension aux bornes du condensateur) et  $\frac{du_c}{dt} = 0$  (continuité du courant à travers la bobine) et le régime permanent est  $u_{c,p} = E$ .

On peut donc tracer l'allure approximative de  $u_c(t)$  et du portrait de phase.

La solution s'obtient grâce aux conditions initiales et au régime permanent et on obtient :

$$u_c(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left( A \cos(\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}) + B \sin(\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}) \right) + E \simeq E \left[ 1 - e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}) \right]$$

## 4 Durée du régime transitoire

On observe dans les trois régimes une décroissance exponentielle, on peut donc estimer la durée du régime transitoire.

## 4.1 Régime pseudo-périodique

La solution est du type  $y(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$  avec  $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$ .

On peut donc estimer que le régime transitoire est terminé au bout de  $T = 5\tau = \frac{10Q}{\omega_0}$ .

## 4.2 Régime apériodique

La solution est du type  $y(t) = e^{-\lambda t} (Ae^{\omega' t} + Be^{-\omega' t}) = Ae^{(\omega' - \lambda)t} + Be^{-(\omega' + \lambda)t}$  avec  $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$  et  $\omega' = \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$ .

On peut donc estimer que le régime transitoire est terminé au bout de  $T = 5\tau = 5 \frac{1}{\lambda - \omega'}$ . Pour les faibles valeurs du facteur de qualité, on peut effectuer un développement limité de  $\omega' \simeq \frac{\omega_0}{2Q} (1 - 2Q^2)$  et on trouve  $T = \frac{5}{\omega_0 Q}$ .

## 4.3 Régime critique

La solution est du type  $y(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$ , donc le régime transitoire peut être considéré comme terminé au bout d'un temps  $T = \frac{5}{\omega_0}$ .

Le régime critique est celui dont le régime transitoire est le plus court.

# 5 Bilan énergétique

## 5.1 Modèle mécanique

Si on suppose de faibles frottements, donc en régime pseudo-périodique, la position de la masse est donnée par l'équation :

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \cos(\omega_0 t)$$

On peut alors calculer l'énergie élastique stockée dans le ressort, l'énergie cinétique, l'énergie mécanique et sa dérivée :

$$\begin{aligned}
 E_{pot}(t) &= \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \cos^2 \omega_0 t \\
 E_{cint}(t) &= \frac{1}{2}mv^2 \simeq \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \sin^2 \omega_0 t \\
 E_m(t) &= \frac{1}{2}kx_0^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \\
 \frac{dE_m}{dt} &= \frac{-1}{2}kx_0^2 \frac{\omega_0}{Q} e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} = \frac{-1}{2}h\omega_0^2 x_0^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}
 \end{aligned}$$

On peut alors comparer cette dérivée à la puissance dissipée par le travail des forces de frottements :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -hv^2 = -h\omega_0^2 x_0^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \sin^2 \omega_0 t$$

et on trouve bien la même chose lorsque l'on fait la moyenne.

## 5.2 Modèle électrique

On peut faire exactement la même analyse pour la réponse libre un circuit RLC avec un grand facteur de qualité, ou bien alors réutiliser l'analogie déjà vue. On trouve alors pour les énergies stockées dans la bobine et le condensateur :

$$\begin{aligned}
 E_C(t) &= \frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{1}{2}CE^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \cos^2 \omega_0 t \\
 E_L(t) &= \frac{1}{2}Li^2 \simeq \frac{1}{2}L\omega_0^2 E^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \sin^2 \omega_0 t \\
 E_{tot}(t) &= \frac{1}{2}CE^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \\
 \frac{dE_{tot}}{dt} &= \frac{-1}{2}CE^2 \frac{\omega_0}{Q} e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} = \frac{-1}{2}RE^2 \frac{C}{L} e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}
 \end{aligned}$$

et on peut comparer cette dérivée à la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance :

$$P = Ri^2 = RC^2 \omega_0^2 E^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \sin^2 \omega_0 t = RE^2 \frac{C}{L} e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \sin^2 \omega_0 t,$$

et on retrouve comme attendu des valeurs égales en moyenne.

## 5.3 Analogie

On peut donc compléter l'analogie effectuée précédemment :

Masse-ressort	Circuit RL
$m$	$L$
$k$	$\frac{1}{C}$
$v$	$i$
$x$	$q$
$kx$	$u_c$
$h$	$R$

### Troisième partie

# Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé

On réutilise la simulation de G. Tulloue à propos de l'oscillateur amorti, en l'occurrence le modèle de l'amortisseur de voiture, lorsque la voiture roule sur une route de profil sinusoïdal. On observe alors que l'amplitude des oscillations verticales de la voiture dépend de la valeur du facteur de qualité, mais aussi de la vitesse à laquelle roule la voiture (en réalité, de la fréquence temporelle des oscillations verticales). Nous voyons d'ailleurs qu'il y a une valeur caractéristique de la fréquence pour laquelle les amplitudes sont maximales, et bien plus grandes que celles de la route : c'est le phénomène de **résonance** qu'on étudiera dans cette partie.

On va étudier dans un premier temps ce système mécanique, puis nous verrons lors de l'étude des circuits électriques comment l'étude d'un tel système linéaire soumis à une excitation sinusoïdale sera simplifiée par l'introduction des grandeurs physiques complexes, en particulier la notion d'impédance complexe en électricité.

## 1 Modélisation et approche de la résonance



## 1.1 Définition

On considère un système masse-ressort en présence de frottements (un oscillateur amorti) auquel on rajoute une force dont l'intensité dépend sinusoidalement du temps à la pulsation  $\omega$  :  $\vec{F}_{ext} = \vec{F}_0 \cos(\omega t)$ .

### Intérêt

On a vu dans le cours sur les signaux sinusoidaux que tout signal périodique pouvait être décomposé comme une somme de signaux sinusoidaux. En associant le fait que l'équation différentielle est linéaire, il suffit de résoudre le problème pour une force sinusoidale quelconque et on aura résolu le problème pour toute force périodique.

La projection du PFD sur l'axe horizontal comme précédemment pour l'oscillateur amorti devient :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - h \frac{dx}{dt} + F_m \cos(\omega t)$$

que l'on met sous la forme canonique :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_m \cos(\omega t),$$

en posant encore  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,  $Q = \frac{\sqrt{km}}{h}$  et  $x_m = \frac{F_m}{m\omega_0^2}$ .

On ne s'intéresse dans cette partie qu'au régime permanent, une fois que le régime transitoire est terminé, donc il n'y aura pas d'influence des conditions initiales.

On va chercher la solution en régime permanent sous la forme d'un signal sinusoidal à la pulsation  $\omega$  (de la même manière qu'on a cherché une solution particulière constante lorsque le second membre était constant). Supposons donc que l'on ait  $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$  et cherchons la valeur de  $x_0$  que l'on obtient.

Alors on doit avoir :

$$-x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \phi) - \frac{\omega \omega_0}{Q} x_0 \sin(\omega t + \phi) + \omega_0^2 x_0 \cos(\omega t + \phi) = \omega_0^2 x_m \cos(\omega t)$$

Cette égalité est alors possible à condition que :

$$\left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left( \frac{\omega \omega_0}{Q} \right)^2 \right] x_0^2 = \omega_0^4 x_m^2,$$

et donc l'amplitude du régime permanent est :

$$x_0 = \frac{x_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}} = \frac{x_m}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}}$$

On a tracé cette fonction pour différentes valeurs du facteur de qualité dans la figure 1. On peut observer que l'amplitude passe par un maximum pour une valeur donnée de  $\omega$  quand le facteur de qualité est plus grand que  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , c'est le phénomène de **résonance**.

### Interprétation

- si  $\omega_0 \gg \omega$ , la force varie très lentement devant la période propre du système : il colle tout le temps à la variation ;
- si  $\omega \gg \omega_0$ , la force varie très rapidement : le système n'arrive pas du tout à suivre et reste à sa position d'équilibre (comme s'il effectuait une moyenne)
- si  $\omega \simeq \omega_0$  : transfert d'énergie très grand, on entre en résonance

### Définition

On observe, en régime sinusoïdal forcé, un phénomène de **résonance** pour une grandeur physique lorsque l'amplitude de celle-ci admet un maximum pour une fréquence particulière appelée **fréquence de résonance**.

On observe donc ici, dans le cas  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  une **résonance en élongation**.

Toutefois, le calcul n'est pas fini, il faut encore déterminer la valeur du déphasage  $\phi$ . On peut par exemple regarder ce qu'il se passe au temps  $t = \frac{-\phi}{\omega}$ , on a alors :

$$\begin{aligned} -x_0 \omega^2 \cos(\omega t + \phi) - \frac{\omega \omega_0}{Q} x_0 \sin(\omega t + \phi) + \omega_0^2 x_0 \cos(\omega t + \phi) &= x_m \omega_0^2 \cos(\omega t) \\ x_0(\omega_0^2 - \omega^2) &= x_m \omega_0^2 \cos \phi \end{aligned}$$

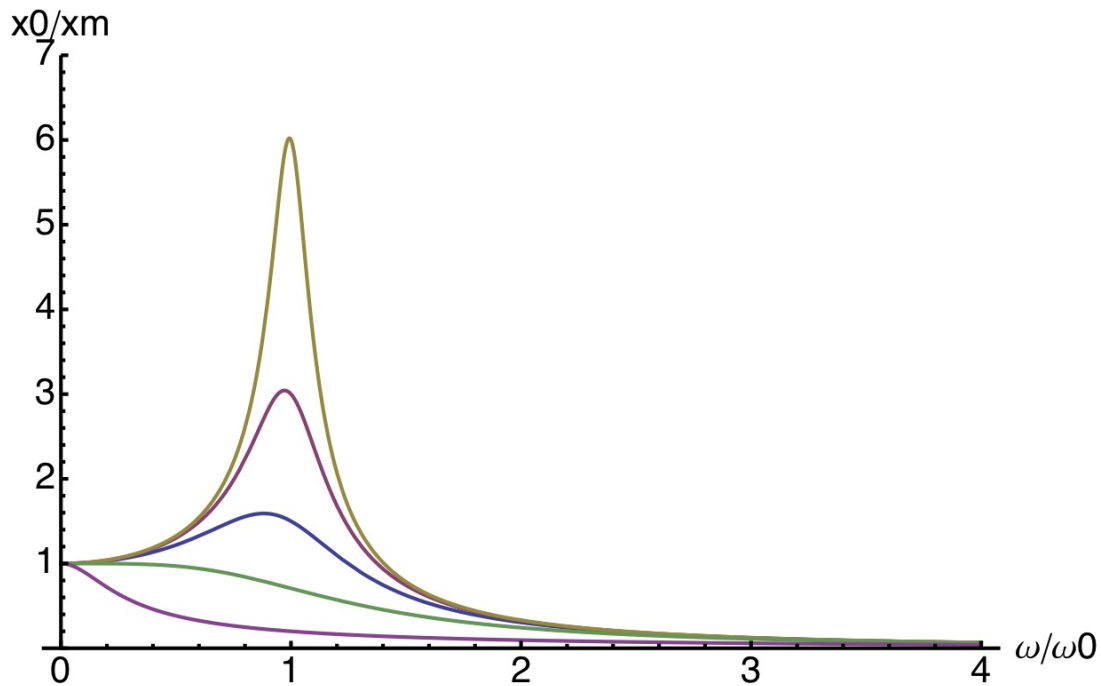


FIGURE 1 – Amplitude du régime permanent en fonction de la pulsation de l'excitation pour différentes valeurs du facteur de qualité : de haut en bas  $Q = 0,2 ; 0,5 ; 1,5 ; 3$  et  $6$ .

et au temps  $t = \frac{\pi/2 - \phi}{\omega}$  :

$$-x_0\omega^2 \cos(\omega t + \phi) - \frac{\omega\omega_0}{Q}x_0 \sin(\omega t + \phi) + \omega_0^2 x_0 \cos(\omega t + \phi) = x_m\omega_0^2 \cos(\omega t)$$

$$-\frac{\omega\omega_0}{Q}x_0 = x_m\omega_0^2 \cos(\pi/2 - \phi) = x_m\omega_0^2$$

On trouve donc :

$$\phi = \text{Arctan} \left( \frac{-\frac{\omega\omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \text{Arctan} \left( Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) - \frac{\pi}{2}.$$

En utilisant la relation  $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x) = \text{sgn}(x)\pi/2$ .

## 1.2 Bilan énergétique

En régime permanent, l'énergie du système est conservée en moyenne : le mouvement est périodique, donc au bout d'une période, on est de retour à la même position (même énergie potentielle) avec la même vitesse (même énergie cinétique). On en déduit donc que les frottements dissipent autant d'énergie que celle qui est fournie par la force excitatrice.

Calculons la puissance moyenne des forces de frottements :

$$\langle P \rangle = \langle -hv^2 \rangle = \langle -h(-x_0\omega \sin(\omega t + \phi))^2 \rangle = -\frac{hx_0^2\omega^2}{2}$$

Ainsi la puissance transmise par la force excitatrice est en moyenne :

$$P_{fournie} = \frac{hx_0^2\omega^2}{2} = \frac{hx_m^2/2}{\left(\frac{1}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 Q}\right)^2}$$

Proche de la résonance, on a alors  $\omega \simeq \omega_0$  et cette expression se simplifie en :

$$P_{fournie} = \frac{h\omega_0^2}{2}x_0^2,$$

donc la résonance correspond à la pulsation pour laquelle l'énergie transférée depuis la source est maximale (puisque la résonance est définie comme la pulsation telle que  $x_0$  est maximal).

A la résonance, le transfert d'énergie entre la source excitatrice et le système est maximal.

*On a donc trouvé (laborieusement) le régime permanent du circuit lorsqu'il est soumis à une force dépendant sinusoidalement du temps. On a remarqué qu'il fallait uniquement déterminer un réel positif  $x_0$  et un angle  $\phi$ . Mathématiquement, c'est équivalent à déterminer le nombre complexe  $\underline{x} = x_0 e^{i\phi}$ , et il se trouve que l'introduction des nombres complexes va grandement faciliter notre étude.*

## 2 Résolution avec les complexes

### 2.1 Utilisation

En régime sinusoidal à la pulsation  $\omega$  tous les signaux peuvent se mettre sous la forme :

$$y(t) = y_0 \cos(\omega t + \phi) = \Re(y_0 e^{j(\omega t + \phi)}),$$

où l'on a noté  $j$  le complexe tel que  $j^2 = -1$  (afin d'éviter une confusion avec un courant électrique). Il est donc tentant d'introduire la fonction complexe :

$$\underline{y}(t) = y_0 e^{j(\omega t + \phi)},$$

telle que  $y(t) = \Re(\underline{y}(t))$ . De plus en posant  $\underline{y}_0 = y_0 e^{j\phi}$ , on a directement  $\underline{y}(t) = \underline{y}_0 e^{j\omega t}$ , et  $\underline{y}_0$  contient les deux informations que l'on cherchait dans la partie précédente dans le cas du déplacement de la masse.

Dans ce cas, les dérivations et intégrations sont très simples :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{y}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\underline{y}_0 e^{j\omega t}) = j\omega \underline{y}_0 e^{j\omega t} = j\omega \underline{y}(t) \\ \int \underline{y}(t) dt &= \frac{\underline{y}}{j\omega} \end{aligned}$$

Si on applique ce raisonnement à la position de la masse trouvée précédemment, on trouve que :

$$x(t) = \Re(\underline{x}_0 e^{j\omega t}),$$

si on pose  $\underline{x}_0 = x_0 e^{j\phi}$ . Si on trouve  $\underline{x}_0$ , on aura alors directement  $x_0 = |\underline{x}_0|$  et  $\phi = \text{Arg}(\underline{x}_0)$ .

On applique donc les dérivations à  $\underline{x}$  et l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = x_m \omega_0^2 \cos(\omega t)$$

devient :

$$\begin{aligned} (j\omega)^2 \underline{x}_0 e^{j\omega t} + \frac{\omega_0}{Q} j\omega \underline{x}_0 e^{j\omega t} + \omega_0^2 \underline{x}_0 e^{j\omega t} &= \underline{x}_m \omega_0^2 e^{j\omega t} \\ \left[ (\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \right] \underline{x}_0 &= \underline{x}_m \omega_0^2 \\ \underline{x}_0 &= \frac{\underline{x}_m \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} \end{aligned}$$

On a donc directement résolu le problème et on trouve à nouveau (comme attendu, et de manière plus rapide) :

$$x_0 = |\underline{x}_0| = \frac{x_m \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2}} = \frac{x_m}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q \omega_0}\right)^2}};$$

$$\phi = \text{Arg}(\underline{x}_0) = -\text{Arctan}\left(\frac{\frac{\omega \omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = -\text{Arctan}\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) - \frac{\pi}{2}.$$

On observe donc bien une résonance pour  $Q > 1/2$  à la pulsation de résonance :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Dans le cas  $Q \gg 1$  (assez fréquent en pratique), on trouve  $\omega_r \simeq \omega_0$ , et le maximum vaut alors  $x_{max} \simeq Q x_m$ .

Exercice : avec une courbe de résonance donnée, déterminer  $\omega_0$  et  $Q$ .

## 2.2 Résonance en vitesse

### 2.2.1 Résolution

Maintenant que nous avons les outils nécessaires à l'étude des régimes sinusoïdaux, appliquons les à l'étude de la vitesse de la masse.

On va pouvoir écrire  $\underline{v}(t) = \underline{v}_0 e^{j\omega t}$ .

De plus, puisque  $\underline{v} = \frac{dx}{dt}$ , on trouve directement  $\underline{v}_0 = j\omega \underline{x}_0$ , on a donc :

$$\underline{v}_0 = \frac{j\omega x_m \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\frac{\omega \omega_0}{Q}} = x_m \omega_0 Q \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$v_0 = x_m \omega_0 Q \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\phi_v = -\text{Arctan}\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

## 2.2.2 Allure et interprétation

On a donc :

$$v_0 = x_m \omega_0 Q \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

On observe alors qu'il y a toujours un maximum, quelle que soit la valeur de  $Q$ , atteint pour  $\omega = \omega_0$  : il y a toujours **résonance en vitesse**.

On peut refaire la même analyse :

- si  $\omega_0 \gg \omega$ , la force varie très lentement devant la période propre du système : il colle tout le temps à la variation ;
- si  $\omega \gg \omega_0$ , la force varie très rapidement : le système n'arrive pas du tout à suivre et reste à sa position d'équilibre (comme s'il effectuait une moyenne)
- si  $\omega = \omega_0$  : transfert d'énergie très grand, on entre en résonance et  $v_{max} = \frac{g_0 Q}{\omega_0} = \frac{F_0}{h}$  donc la vitesse maximale ne dépend plus de la masse.

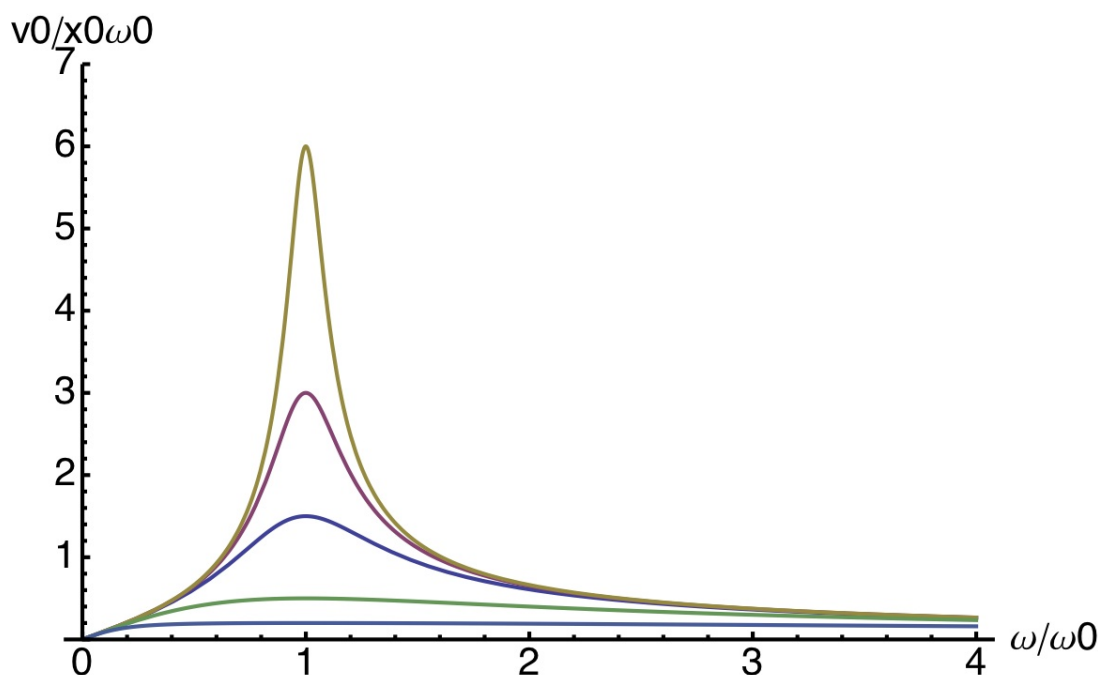


FIGURE 2 – Amplitude de la vitesse du régime permanent en fonction de la pulsation de l'excitation pour différentes valeurs du facteur de qualité : de haut en bas  $Q = 0,2 ; 0,5 ; 1,5 ; 3$  et  $6$ .

Enfin, on observe sur la figure 2 que plus le facteur de qualité est élevé, plus la résonance est **piquée**, c'est la notion de bande passante abordée maintenant.

## 2.2.3 Bande passante

### Définition

La **bande passante** est l'intervalle de fréquence (ou de pulsation) pour lesquelles la valeur de l'amplitude est supérieure ou égale à la valeur maximale (à la résonance) divisée par  $\sqrt{2}$ .

Dessin.

Regardons alors la valeur de la bande passante pour la résonance en vitesse.

Pour la résonance en vitesse, on cherche les valeurs telles que :

$$x_m \omega_0 Q \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \geq x_m \omega_0 Q \frac{1}{\sqrt{2}}$$

On doit donc avoir pour les deux valeurs limites de la pulsation  $Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1$ . Posons  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  et l'équation devient  $Q(x + 1/x) = \pm 1$  dont on doit garder uniquement les deux solutions positives. L'équation peut se réécrire  $x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$  et donc les deux solutions positives sont  $x_{1,2} = \frac{\pm 1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{4Q^2} + 1}$ .

La bande passante est donc donnée par la valeur  $\Delta\omega = \omega_0(x_2 - x_1) = \frac{\omega_0}{Q}$ .

On retrouve donc bien le fait que plus le facteur de qualité est élevé, plus la résonance est piquée.

## 3 Résonances en électricité

### 3.1 Circuit étudié et outils

#### 3.1.1 Circuit

On va étudier dans cette partie un circuit RLC série branché sur un GBF délivrant une tension sinusoïdale  $E(t) = E_m \cos \omega t$ .

L'étude d'une tension sinusoïdale est motivée par deux raisons : tout d'abord, le réseau électrique EDF délivre une tension sinusoïdale ( $E_m = 220$  V à la fréquence de 50 Hz), ensuite, la décomposition en série de Fourier nous assure que l'on pourra directement résoudre le cas plus général d'une tension qui varie périodiquement.



### 3.1.2 Outil complexe en électricité

Nous avons vu que l'introduction des fonctions complexes simplifiait grandement l'étude des signaux sinusoïdaux puisque tant le régime permanent que la tension du GBF pourront être factorisées par  $e^{j\omega t}$  qui se simplifiera lors des calculs.

On introduit donc des tensions et des intensités complexes comme  $\underline{u}(t) = \underline{u}_0 e^{j\omega t}$  et  $\underline{i}(t) = \underline{i}_0 e^{j\omega t}$

On définit alors pour tous les dipôles une impédance complexe  $\underline{Z}$  telle que  $\underline{Z} = \frac{\underline{u}_0}{\underline{i}_0} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)}$ .

Toutes les lois de l'électricité linéaires sont aussi valables en complexe, en particulier, les lois de Kirchhoff.

On peut donc associer en série ou en parallèle des impédances complexes et on trouve :

- Association série :  $\underline{Z}_{eq,s} = \Sigma \underline{Z}_i$
- Association parallèle :  $\frac{1}{\underline{Z}_{eq,p}} = \Sigma \frac{1}{\underline{Z}_i}$

Les formules des ponts diviseurs de courant et de tension sont aussi linéaires, donc toujours valables :

- Pont diviseur de tension :  $\underline{u}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{u}$
- Pont diviseur de courant :  $\underline{i}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{i}$

### 3.1.3 Impédances usuelles

On peut alors calculer l'impédance des dipôles usuels, en particulier ceux qui nous intéressent dans ce circuit.

- conducteur ohmique : la relation courant-tension (loi d'Ohm) est  $u(t) = Ri(t)$ , on a donc  $\underline{Z} = R \in \mathbb{R}$ . Puisque l'impédance est réelle, on retrouve que tension et intensité sont en phase.
- Condensateur : la relation courant-tension est  $i = C \frac{du}{dt}$ , donc en régime sinusoïdal et avec les notations complexes  $\underline{i}_0 = jC\omega \underline{u}_0$ . Ainsi, l'impédance complexe d'un condensateur est  $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$ . Elle dépend donc de la fréquence à laquelle on l'étudie, et puisque la partie imaginaire de  $\underline{Z}$  est négative, la tension est en retard sur le courant.

- Bobine : la relation courant-tension est  $u = L \frac{di}{dt}$ , donc en régime sinusoïdal et avec les notations complexes  $\underline{u}_0 = jL\omega \underline{i}_0$  donc l'impédance complexe d'une bobine est  $\underline{Z} = jL\omega$ . Elle dépend donc de la fréquence à laquelle on l'étudie, et puisque la partie imaginaire de  $\underline{Z}$  est positive, la tension est en avance sur le courant.

On retrouve les comportements attendus en régime permanent ( $\omega \rightarrow 0$ ) :  $\underline{Z}_C \rightarrow \infty$  (condensateur équivalent à un coupe-circuit) et  $\underline{Z}_L \rightarrow 0$  (bobine équivalente à un fil).

On obtient aussi les comportements à hautes fréquences  $\omega \rightarrow \infty$  :  $\underline{Z}_C \rightarrow 0$  (condensateur équivalent à un fil) et  $\underline{Z}_L \rightarrow \infty$  (bobine équivalente à un coupe-circuit).

## 3.2 Résonance en intensité

### 3.2.1 Résolution

En utilisant l'analogie que l'on a vu, on s'attend à ce que la résonance en intensité soit comparable à la résonance en vitesse : visible quelle que soit la valeur du facteur de qualité, et à la pulsation  $\omega_r = \omega_0$ .

Le GBF fournit une tension  $\underline{E}(t) = E_m e^{j\omega t}$ , et nous cherchons l'intensité du courant délivré. Il nous faut donc trouver l'impédance du circuit et la réponse sera immédiate.

Nous associons en série une résistance, un conducteur ohmique et une inductance, donc l'impédance équivalente est :

$$\underline{Z}_{eq} = jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}.$$

On obtient donc :

$$\underline{i} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{E_m}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{E_m/R}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}.$$

On a donc  $i(t) = i_0 \cos(\omega t + \phi)$  avec :

$$i_0 = \frac{E_m/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\phi = \text{Arctan}\left(Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)$$

### 3.2.2 Allure et interprétation

On a bien résonance pour toute valeur de  $Q$ , à la pulsation de résonance  $\omega_r = \omega_0$ . Le maximum est alors de  $E_m/R = E_m Q \sqrt{\frac{C}{L}}$  donc proportionnel à  $Q$ . Ce sont comme attendus les mêmes résultats que pour la résonance en vitesse du système masse-ressort.

- Quand  $\omega \ll \omega_0$ , on est en régime quasi-permanent : le condensateur agit comme un coupe-circuit, et donc le courant tend vers 0 ;
- quand  $\omega \gg \omega_0$ , on est en très haute fréquence : la bobine agit alors comme un coupe-circuit, et donc le courant tend vers 0 ;
- quand  $\omega = \omega_0$ , alors  $\phi = 0$ , le courant et la tension sont en phase. Le circuit est donc purement résistif, ce que l'on peut vérifier car  $\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + jL\omega(1 - LC\omega^2) = R$ . Puisque tension et intensité sont en phase, le mode XY de l'oscilloscope est celui qui permet de repérer le plus précisément la résonance.

La bande passante en pulsation est une fois de plus  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ .

## 3.3 Résonance en tension

Sur le même circuit, on s'intéresse maintenant à la tension aux bornes du condensateur  $u(t)$ .

On peut utiliser un pont diviseur de tension et on a directement :

$$\underline{u}(t) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{E}(t)$$

On trouve donc  $u(t) = u_0 \cos(\omega t + \phi_u)$  avec :

$$u_0 = \left| \frac{E_m \frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} \right| = \frac{E_m}{|(1 - LC\omega^2) + jRC\omega|} = \frac{E_m}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}$$

$$\phi_u = \text{Arg} \left( \frac{E_m}{|(1 - LC\omega^2) + jRC\omega|} \right) = -\text{Arctan} \left( \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2} \right)$$

On pose alors comme déjà vu  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  pour retrouver des expressions similaires à celles de la résonance en élongation :

$$u_0 = \frac{E_m}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}};$$

$$\phi_u = \text{Arctan} \left( Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) - \frac{\pi}{2}.$$

On va donc ici aussi n'observer une résonance qu'à la condition que  $Q \geq 1/\sqrt{2}$ . La pulsation de résonance est  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ .

Dans le cas faiblement amorti, la tension à la résonance est alors  $u_{max} \simeq QE_m$ , ce qui peut amener des surtensions très élevées (et donc détruire le condensateur!).

- Quand  $\omega \ll \omega_0$ , on est en régime quasi-permanent : le condensateur agit comme un coupe-circuit et la bobine comme un fil, donc le courant tend vers 0 et avec la loi des mailles on a  $u = E$ , donc  $u_0 = E_m$  et les deux tensions sont en phase ;
- quand  $\omega \gg \omega_0$ , on est en très haute fréquence : le condensateur agit alors comme un fil donc  $u_0 \rightarrow 0$  ;
- quand  $\omega = \omega_0$ , alors  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ , les deux tensions sont en quadrature de phase, compatible avec la valeur imaginaire pure de l'impédance (en mode XY, l'ellipse a ses axes horizontaux et verticaux).