Physique 4
Circuits électriques dans l'ARQS

Expériences

- Caractéristique d'un générateur réel
- Charge et décharge d'un condensateur

Table des matières

On va étudier dans ce chapitre les lois de l'électricité qui régissent la majorité des expériences d'électronique que vous pourrez réaliser cette année. Le cadre principal est l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) dans lequel tout se passe comme si la vitesse de la lumière était infinie. Nous verrons dans quel cadre on pourra faire cette approximation et donc comment des variations de tension ou de courant se répercute sur l'ensemble d'un circuit électrique. Toutefois, nous étudierons dans un premier temps le régime continu afin de bien fixer les notations et conventions et découvrir les premières lois.

Première partie

Electricité en régime continu

1 Lois de Kirchhoff

1.1 Courant électrique

1.1.1 Définitions

Un **courant électrique** est un déplacement d'ensemble (donc macroscopique) de particules chargées.

Dans les cas étudiés cette année, les particules chargées peuvent être des électrons (dans les métaux) ou des ions (dans les solutions électrolytiques). Il peut aussi s'agir d'autres particules dans d'autres cas plus particuliers (supraconducteurs, semi-conducteurs, plasmas). Puisque tant les électrons que les ions ont une charge multiples de la charge élémentaire, la quantité de charge qui se déplace est **quantifiée** : c'est un multiple de la charge élémentaire.

Le déplacement d'ensemble peut être causé par connexion d'un générateur à un circuit électrique ou sans contact par une onde (plaques à induction, antenne de télévision ou de téléphone portable, transformateurs)

Pour mesurer le courant électrique, on compte la quantité de charges électriques dq qui traverse une section S du conducteur par unité de temps dt. Schéma.

On note mathématiquement :

$$i = \frac{dq}{dt}$$

où i est le courant en ampère (A), dq une charge en coulomb (C), et dt une durée en seconde (s). Cette notation signifie que le courant est la dérivée de la charge par rapport au temps.

1.1.2 Conventions

Lorsqu'on applique un champ électrique à une solution électrolytique (par exemple de l'eau salée, contenant les ions Na^+ et Cl^-), les anions se déplacent dans une direction et les cations dans l'autre. Par convention, on choisit que le sens du courant est le sens de déplacement des porteurs de charges positifs. C'est aussi le sens de la borne positive à la borne négative du générateur.

Attention

Dans un conducteur métallique, les électrons vont dans le sens opposé à celui du courant (les électrons sont des porteurs de charge négatifs).

Pour les mesures, on choisit le sens que l'on veut (c'est ce qu'on appelle un choix arbitraire), que l'on représente par une flèche le long du fil. On peut donc avoir un courant positif (s'il est mesuré dans le même sens que celui de la convention) ou négatif (s'il est mesuré dans l'autre sens). Le courant électrique est une **grandeur algébrique** puisqu'il a un signe. Ce n'est pas grave d'avoir un courant négatif, ça veut juste dire qu'il est positif dans l'autre sens !

1.1.3 Ordres de grandeurs et mesure

L'intensité d'un courant électrique peut varier énormément en fonction de l'application considérée. On peut donner comme exemples :

- l'électronique signal (ordinateurs, téléphones portables) : de l'ordre du mA ;
- l'usage domestique : de l'ordre de l'ampère
- l'électrotechnique (motrices TGV, usines) : jusqu'au kA
- foudre : jusqu'à la centaine de kA.

L'appareil utilisé pour mesurer le courant électrique est un ampèremètre, symbolisé par un A encerclé. L'ampèremètre se branche **en série**, le courant entre par la borne rouge A ou mA, et ressort par la borne noire COM. Un ampèremètre idéal ne perturbe pas du tout le circuit et est équivalent à un fil. Ainsi, branché en parallèle, il crée un court-circuit !

1.1.4 Loi des nœuds

La charge électrique est une grandeur conservative comme la masse : il n'est pas possible de faire disparaitre ou apparaitre de la charge électrique.

Imaginons alors un **nœud**, point de rencontre de plusieurs conducteurs. On représente les nœuds en électricité par un point épais. On choisit par convention de compter tous les courants i_n comme positifs si ils vont vers le nœud. Pendant un temps dt, la charge accumulée par le nœud est :

$$dq = dq_1 + dq_2 + dq_3 + \cdots + dq_N = \sum_{n=1}^{N} i_n dt.$$

Or il est impossible d'accumuler de la charge dans un conducteur, ni d'en détruire, on doit donc avoir $dq = 0$. La condition sur les courants est donc :

$$\sum_{n=1}^{N} i_n = 0.$$

Un **nœud** est un embranchement entre plusieurs fils, représenté par un point épais. La **loi des nœuds** stipule qu'en un nœud électrique, la somme des courants entrant et égale à la somme des courants sortants.

Une conséquence de cette loi est que le long d'un conducteur, le courant est le même partout puisqu'il n'y a pas d'accumulation ni de destruction ou création de charges. Nous verrons dans la deuxième partie à quelle condition sur la vitesse de variation du courant cette propriété est toujours valable.

1.2 Tension électrique

1.2.1 Définitions

Dans un circuit électrique, les charges sont mises en mouvement par un champ électrique. Ce champ est dû à la différence de potentiel électrique entre différents points du circuit.

Analogie avec l'hydrodynamique : le courant électrique est l'analogue du débit massique (on compte la quantité d'eau qui traverse une section de fleuve pendant un temps donné), alors que la tension est l'analogue de la différence d'altitude entre deux points du fleuve (ce qui met en mouvement l'eau).

On note V_A le potentiel électrique du point A, il se mesure en volt V. C'est une grandeur qui n'a aucun intérêt si elle est donné toute seule : il faut une référence (c'est comme dire que Dijon est à 300 km sans préciser de quoi).

On choisit la valeur zéro du potentiel électrique où l'on veut (tout comme on choisit la valeur 0 de l'altitude pour un fleuve différemment selon les pays), c'est le point que l'on appelle **la masse**.

La **tension électrique** est la différence de potentiel entre 2 points : $U_{AB} = V_A - V_B$. Elle se mesure donc en volt. On a directement les propriétés : $U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$ (additivité des tensions) et $U_{BA} = -U_{AB}$. On peut donc avoir des tensions négatives, c'est aussi une grandeur algébrique.

Avec un schéma, il est possible d'alléger la notation en représentant la tension par une flèche allant de B à A (attention au sens !).

1.2.2 Ordre de grandeur et mesure

La tension est aussi une grandeur électrique dont l'ordre de grandeur varie grandement en fonction de l'usage :

- électronique : de l'ordre du millivolt au volt ;
- usage domestique : de l'odre de la centaine de volt (220 V ou 380 V en France) ;
- électrotechnique ou ligne haute tension : de l'ordre de la centaine de kV ;
- foudre : de l'ordre de la dizaine de MV.

La tension entre deux point se mesure avec un voltmètre, symbolisé par un V encerclé. Le voltmètre se branche **en parallèle**, en reliant la borne rouge V au point A et la borne noire COM au point B. Un voltmètre idéal ne perturbe pas le circuit, il est équivalent à un coupe-circuit (un interrupteur ouvert), donc il modifie grandement le circuit si branché en série (mais pas grave contrairement à un ampèremètre mal branché).

1.2.3 Loi des mailles

Considérons un circuit composé de n points A_1, A_2, …, A_n. Alors si on considère la somme :

$$\mathcal{U} = U_{A_2A_1} + U_{A_2A_3} + \cdots + U_{A_{n-1}A_n} + U_{A_nA_1} = \sum_{i=1}^{n} U_{A_{i+1}A_i}$$

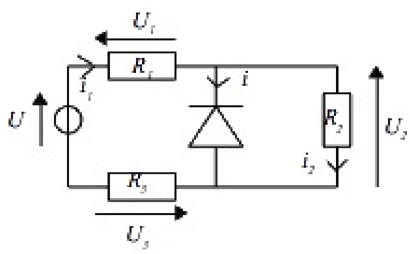
où l'on note pour simplifier $A_{n+1} = A_1$, alors on peut changer chaque tension par une différence de potentiel :

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \sum_{i=1}^{n} V_{A_{i+1}} - V_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} V_{A_{i+1}} - \sum_{i=1}^{n} V_{A_i} \\ &= \sum_{j=2}^{n+1} V_{A_j} - \sum_{i=1}^{n} V_{A_i} \\ &= V_{A_{n+1}} - V_{A_1} = 0\end{aligned}$$

La loi des mailles stipule que l'addition de toutes les tensions le long d'une maille (en faisant bien évidemment attention aux orientations) donne un résultat nul.

Les lois de Kirchhoff correspondent à la loi des nœuds et la loi des mailles.

Exercice : comment brancher l'ampèremètre ou le voltmètre pour mesurer i_1 ou U_2 ? On donne $i_1 = 3{,}0$ A , $i_2 = 4{,}0$ A, $U_1 = 2{,}0$ V ,$U_2 = 3{,}0$ V et $U_3 = 1{,}0$ V. Que valent U et i ?



1.2.4 Mesures à l'oscilloscope

Un oscilloscope est en fait un ensemble de 2 ou 4 voltmètres, tous reliés à la même masse (la borne noire). Si en plus on utilise un GBF, la masse est commune au GBF et à l'oscilloscope (reliés par la terre). Dans le montage précédent, comment brancher l'oscilloscope pour observer i_2 ? Est-il possible d'observer U en même temps ?

2 Dipôles

2.1 Généralités

2.1.1 Définitions et conventions

Un **dipôle** est un composant électrique à deux "pattes" (résistances, condensateurs, bobines, piles, diodes, etc) par opposition aux multipôles qui en ont plus que deux (transistors, circuits intégrés, etc).

Dans ce chapitre on s'intéressera pas à la manière dont les dipôles sont fabriqués ni de quoi ils sont constitués. On les considèrera comme des boites noires. Par exemple, une portion très complexe d'un circuit peut être considérée comme un dipôle (schéma).

Pour cette vision boîte noire on va se fixer deux conventions :

- la **convention récepteur** : la tension et le courant ont des sens opposés. C'est généralement le cas pour les dipôles qui consomment de l'électricité ;
- la **convention générateur** : la tension et le courant sont de même sens. C'est généralement le cas pour les dipôles qui produisent de l'électricité.

Ces deux conventions sont compatibles, par exemple sur un schéma avec une pile alimentant une lampe.

2.1.2 Caractéristique d'un dipôle

Il y a souvent un lien entre la tension aux bornes d'un dipôle et le courant qui le traverse, cette relation permet de distinguer les différents types de dipôles.

On donne souvent la relation $i = f(U)$ et le graphe correspondant, on appelle cette relation la **caractéristique du dipôle**. Exemple pour une résistance : $i = \frac{U}{R}$. On peut aussi donner la **caractéristique tension- courant** $U = g(i)$ (pour une résistance $U = Ri$).

Sur le graphique de la caractéristique, chaque point de la courbe est un **point de fonctionnement** du dipôle, c'est-à-dire un couple (courant, tension) auquel il est susceptible de fonctionner. L'intérêt est qu'en associant deux caractéristiques, on peut déterminer le point de fonctionnement (c'est à dire le courant et la tension) d'un circuit. Exemple : pile + lampe.

2.1.3 Puissance et énergie électriques

Pour calculer la puissance électrique, il faut savoir quelle convention est utilisée.

- en convention **récepteur**, la puissance **consommée** par le dipôle est $P = Ui$. Elle est positive ou négative (une puissance consommée négative correspond à une puissance effectivement fournie par le dipôle) ;
- en convention **générateur**, la puissance **fournie** par le dipôle est $P = Ui$. Elle est positive ou négative (une puissance fournie négative correspond à une puissance effectivement consommée par le dipôle).

L'énergie est quant à elle calculée, à puissance constante par la formule $E = P\Delta t$ (à puissance variable $E = \int Pdt$) où E est l'énergie consommée (ou fournie) par le dipôle pendant le temps Δt.

2.2 Dipôles usuels

2.2.1 Générateurs idéaux

Une **source de tension** est un générateur idéal de tension : elle impose la tension U_0 à ses bornes, quelle que soit l'intensité du courant i qui la traverse. On ne peut donc que les associer en série, jamais en dérivation. On la représente par un cercle traversé par le circuit électrique. Sa caractéristique est une droite parallèle à l'axe représentant l'intensité.

Une **source de courant** est un générateur idéal de courant : elle impose le courant i_0 qui la traverse, quelle que soit la tension U à ses bornes. On ne peut donc que les associer en dérivation, jamais en série. On la représente aussi par un cercle barré perpendiculairement au circuit électrique. Sa caractéristique est une droite parallèle à l'axe représentant la tension.

2.2.2 Résistances

Dans la plupart des conducteurs, on s'aperçoit qu'il y a proportionnalité entre la tension aux bornes du conducteur et le courant qui le traverse. On appelle la constante de proportionnalité la **résistance** du conducteur (fonction de ses dimensions et du matériau utilisé).

Un tel conducteur est appelé un **conducteur ohmique** car il suit la **loi d'Ohm** : $U = Ri$, où U est la tension aux bornes du conducteur, i le courant qui le traverse et R sa résistance en ohm (symbole Ω). Les conducteurs ohmiques sont des dipôles passifs, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas créer eux-mêmes du courant donc leur caractéristique passe par le point ($U= 0$, $i=0$), on utilise donc implicitement la convention récepteur pour écrire la loi d'Ohm.

La résistance R d'un conducteur ohmique dépend du matériau dont il est constitué et de ses dimensions (elle augmente quand L augmente ou S diminue). Pour un fil électrique, nous considérerons que $R = 0\ \Omega$, c'est-à-dire que l'on négligera la résistance des fils.

La puissance reçue par un conducteur ohmique est $P = Ui = Ri^2 = \frac{U^2}{R}$. Elle est dissipée sous forme de chaleur (expérimentalement, un conducteur ohmique chauffe quand un courant le traverse), c'est l'**effet Joule**. L'effet Joule peut-être bénéfique (chauffage électrique, appareil à raclette, ampoule à incandescence), ou au contraire et la plupart du temps nuisible (nécessité des ventilateurs pour un ordinateur par exemple, de plus en plus important que S diminue).

2.2.3 Générateurs réels

☕

Caractéristique d'un générateur réel

✍ ⏲ 5 min

On branche un générateur sur une décade de résistance, et un voltmètre mesure la tension délivrée par le générateur. On part d'une résistance très élevée (par exemple 1 $M\Omega$), et on diminue progressivement la valeur de la résistance. Lorsque la résistance devient de l'ordre de la dizaine d'ohm, on remarque une chute de la tension délivrée par le générateur

Pour un générateur réel, on se rend compte expérimentalement que la caractéristique n'est pas celle d'un générateur idéal, on observe une loi affine : $U = e - Ri$ où e est la **force électromotrice** aussi appelée **tension à vide** (celle qu'on mesurerait en branchant uniquement un voltmètre idéal sur la source).

R est la résistance interne du générateur, elle est de l'ordre de 50 Ω. Lorsque la résistance interne est nulle, on est en présence d'un générateur idéal.

Schéma équivalent.

Ceci constitue le **modèle de Thévenin**, suivi par la plupart des générateurs réels.

2.3 Associations de dipôles

2.3.1 Association de résistances

Il est possible d'associer deux résistances R_1 et R_2 de deux manières différentes :

- en série : le courant qui les traverse toutes les deux est le même. Elles sont "l'une à la suite de l'autre". La tension aux bornes des deux résistances est $U = U_1 + U_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)i$, donc l'association des deux résistances est équivalente à une résistance équivalente $R_s = R_1 + R_2$.

- en parallèle : la tension aux bornes des deux résistances est la même. Elles sont "l'une à côté de l'autre". Le courant total qui passe par les deux résistances est alors $i = i_1 + i_2 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = \frac{U}{R_p}$, donc l'association de deux résistances en parallèle est équivalente à une résistance équivalente $R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

On peut généraliser à N résistances :

- en série : $R_s = \sum_{i=1}^{N} R_i$

- en parallèle : $\frac{1}{R_p} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}$

Application calculer le courant délivré par un générateur de tension idéal de 5V alimentant une résistance R_1 =100 Ω associée en parallèle à deux résistances en série $R_2 = 80$ Ω et $R_3 = 20$ Ω.

2.3.2 Association de générateurs

- Générateurs de tension :

  On peut facilement associer en série deux générateurs de tension U_1 et U_2 (c'est ce que l'on fait quand on introduit plusieurs piles tête-bêche dans un appareil électrique), on obtient alors un générateur équivalent de tension $U = U_1 + U_2$.

  Par contre si on met deux générateurs de tension U_1 et U_2 en parallèle, quelle est la tension aux bornes des générateurs ? Il faut que U_1 soit égal à U_2, et donc en pratique, chaque générateur va essayer d'imposer sa tension à l'autre, résultant en la destruction des générateurs.

- Générateurs de courant :

  On peut facilement associer en dérivation deux générateurs de courant i_1 et i_2, on obtient alors un générateur équivalent de courant $i = i_1 + i_2$.

  Par contre si on met deux générateurs de courant i_1 et i_2 en série, quelle est le courant qui traverse les deux générateurs ? Il faut que i_1 soit égal à i_2, et donc en pratique, chaque générateur va essayer d'imposer son courant à l'autre, résultant en la destruction des générateurs.

2.3.3 Diviseur de tension

On considère deux résistances R_1 et R_2 en série, alimentées par une tension U.

Alors le courant qui traverse les deux résistances est $i = \frac{U}{R_1+R_2}$, et donc la tension aux bornes de la deuxième résistance est $U_2 = R_2 i = \frac{R_2}{R_1+R_2}U$.

La tension U est donc multipliée par un coefficient plus petit que 1, d'où le nom de diviseur de tension.

Schéma.

En pratique : on voit la plus grosse tension aux bornes de la résistance la plus grande.

2.3.4 Diviseur de courant

On considère deux résistances R_1 et R_2 en parallèle, alimentées par un courant total i.

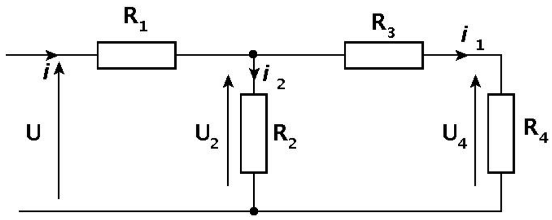
Alors la tension aux bornes des deux résistances est $U = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} i$, et la tension aux bornes de la deuxième résistance est $U_2 = R_2 i_2$.

On a donc $i_2 = \frac{R_1}{R_1+R_2} i$, donc le courant i est multiplié par un coefficient plus petit que 1, d'où le nom de diviseur de courant.

Schéma.

En pratique : le courant passe plus par la branche de résistance la plus faible, c'est le "chemin le plus facile" pour lui. C'est le danger des courts circuits.

Exercice d'application : déterminer la valeur de $U_4 = f(U)$.



2.4 Résistances d'entrée et de sortie

2.4.1 Définitions et exemples

On a vu qu'un générateur n'est jamais idéal : on modélise donc tout générateur par un générateur de Thévenin, c'est-à-dire une source de tension idéale suivie d'une résistance interne. Toute partie de circuit contenant un générateur est aussi modélisable avec le modèle de Thévenin, elle est donc équivalente à une source de tension idéale en série avec une résistance, c'est la **résistance de sortie**. C'est par exemple le cas d'un générateur, d'un GBF, de la sortie d'un amplificateur, etc. Schéma.

De la même manière, on modélise toute partie du circuit réceptrice par une résistance appelée résistance d'entrée.

Pour un filtre ou un amplificateur (ou autres) on a à la fois une entrée et une sortie, on modélise donc l'élément par une résistance d'entrée, un générateur idéal et une résistance de sortie. Schéma.

Ordres de grandeur

- Résistance de sortie générateur $\sim 50\Omega$
- Résistance d'entrée voltmètre $\sim 1M\Omega$
- Résistance d'entrée ampèremètre $\sim 10\Omega$
- Résistance entrée haut-parleur $\simeq 8\Omega$

2.4.2 Utilisation

La plupart du temps on va brancher les différents éléments les uns aux autres, par exemple un microphone (=générateur) sur un amplificateur puis sur un haut-parleur. La tension aux bornes du haut-parleur dépend alors des différentes résistances d'entrée et de sortie.

Exemple : si on branche un générateur de tension $U_0 = 5$ V avec une résistance de sortie $R_i = 50\Omega$ sur un voltmètre de résistance d'entrée $R_V = 1M\Omega$, on mesure :

$$U = \frac{R_V}{R_i + R_V} U_0 \simeq U_0.$$

De manière plus générale, si la résistance d'entrée est bien plus grande que la résistance de sortie, on a le même comportement qu'à vide (c'est ce qui est cherché la plupart du temps). Par contre si on le branche sur un haut-parleur de résistance d'entrée $R_{HP} = 8\Omega$, la tension aux bornes du haut-parleur est :

$$U = \frac{R_{HP}}{R_{HP} + R_i} U_0 = 0,7\text{V}.$$

On voit donc qu'il y a une perte de tension. En fait une grande partie de la tension est aux bornes de la résistance de sortie qui la dissipe par effet Joule, et donc le générateur est moins efficace. De manière générale, dès que la résistance d'entrée est de l'ordre de la résistance de sortie ou inférieure, il y a abaissement de la tension.

2.4.3 Mesures

Pour mesurer une résistance d'entrée, un ohmmètre suffit, ou bien on peut alimenter le dipôle avec plusieurs tensions et regarder le courant puis faire une régression linéaire.

Pour mesurer une résistance de sortie, ce n'est pas possible : le circuit débiterait alors du courant. On utilise donc la méthode de la demi-tension qui consiste à mesurer la tension à vide U_0 (avec un voltmètre), puis de brancher le générateur sur une résistance variable. On mesure la tension aux bornes de la résistance, et la valeur de la résistance telle que $U = U_0/2$ est la même que la valeur de la résistance de sortie (pont diviseur de tension).

Deuxième partie

Circuits linéaires du premier ordre

Charge et décharge d'un condensateur

✍ ⏲ 5 min

- On monte en parallèle un condensateur de capacité 10 μF et une résistance de 10 kΩ en série avec une LED.
- On ferme le circuit, on voit que la LED s'allume instantanément. On ouvre le circuit, on observe la lumière de la LED qui diminue progressivement jusqu'à s'éteindre.
- On fait la même chose en mettant le condensateur en série de la résistance et de la LED.
- On effectue aussi l'acquisition avec l'oscilloscope de la décharge $u_C(t)$ en fonction du courant $E - u_C$.

On s'aperçoit donc que l'extinction de la LED n'est pas instantanée, il y a un "retard" à l'extinction. Pourquoi ?

1 Cadre de l'étude

1.1 L'approximation des régimes quasi-stationnaires

1.1.1 Origine

Comme on vient d'en faire la démonstration, toutes les grandeurs électriques ne sont pas constantes (de toute façon, avant la découverte de la pile par Volta, elles étaient toutes nulles, donc elles auraient dû le rester si on était en régime stationnaire).

Lors d'un changement brutal de tension, les charges se mettent en mouvement d'un coup, et il peut arriver qu'il se forme un "bouchon" si le changement est trop brusque. Alors dans ce cas, des charges peuvent s'accumuler à certains endroits et la loi des nœuds n'est plus vérifiée.

La cause est que la vitesse des charges dans les conducteurs est de l'ordre de celle de la lumière dans le vide (elles ne peuvent pas aller plus vite), donc si on regarde un circuit trop grand, on peut faire entrer des charges dans un fil et il se passe un temps avec qu'on ne les voie ressortir : accumulation de charges dans le conducteur.

Pour pallier ce problème, on ne considère que des circuits assez petits, et que des variations des grandeurs électriques assez lentes.

Si la fréquence de variation des grandeurs électriques est notée f et la longueur typique du circuit l_0, on pourra se mettre dans le cadre de **l'approximation des régimes quasi-stationnaire** si :

$$f \ll \frac{c}{l_0}$$

En pratique, on considèrera que c'est la cas pour $f < \frac{c}{10 l_0}$.

Exemples :

- En TP , $l_0 \sim 1$ m, donc on trouve des fréquences maximales de l'ordre de 30 MHz.
- Si on fixe la fréquence à 1 kHz, la longueur maximale du circuit pour rester dans l'ARQS est 30 km.
- Pour le réseau EDF, il commence à y avoir des problèmes : f = 50 Hz donc $l_{max} \sim 600$ km ce qui est plus petit que la taille du réseau français...

1.1.2 Conséquences

On s'est placé volontairement dans le cas où on néglige les accumulations de charge possibles lorsque les grandeurs électriques varient. On peut donc toujours appliquer la loi des nœuds.

De même, on a toujours la loi des mailles.

Dans l'ARQS, les lois de Kirchhoff sont toujours valables en changeant les grandeurs électriques stationnaires par leurs valeurs dépendant du temps.

Exemples sur un circuit simple.

La loi d'Ohm est elle aussi toujours valable dans l'ARQS.

1.2 Condensateur

1.2.1 Relation courant-tension

Un condensateur est composé de deux armatures métalliques séparées par un isolant. Lorsqu'un courant arrive sur une des armatures du condensateur, les charges s'accumulent sur cette armature, ce qui crée une tension électrique.

La grandeur qui caractérise un condensateur est sa capacité C qui s'exprime en farad (F). Elle peut varier typiquement du pF (électronique) au F (industrie). Elle donne le lien entre la charge accumulée sur les armatures q et la tension aux bornes du condensateur U : $q = CU$. Schéma électrique.

Si on regarde la charge accumulée sur une des armatures pendant un temps dt, on a $dq = Idt$.

On obtient donc la caractéristique du condensateur en convention récepteur (équivalent de la loi d'Ohm) :

$$i(t) = C\frac{du}{dt}.$$

Donc en régime permanent ($U = constante$), le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert ($i = 0$). Compatible avec expérience d'introduction.

1.2.2 Aspect énergétique

La puissance reçue par le condensateur est $P = Ui$ donc :

$$P = U \times C\frac{du}{dt} = \frac{d\frac{CU^2}{2}}{dt}$$

On en déduit que l'énergie accumulée dans un condensateur est :

$$E = \frac{1}{2}CU^2.$$

L'énergie étant une grandeur continue du temps, on en déduit que :

La tension aux bornes d'un condensateur est continue.

1.3 Bobine

1.3.1 Relation courant-tension

Une bobine est un enroulement de fil de métal très bon conducteur (généralement du cuivre). Elle est caractérisée par sa résistance interne (que l'on va négliger dans un premier temps) et son inductance L qui s'exprime en henry (H). Schéma électrique.

Les valeurs d'inductance vont du mH en TP à la centaine de H au LHC.

La relation courant-tension d'une bobine en convention récepteur est :

$$U = L\frac{di}{dt}.$$

En régime permanent ($i = constante$), la bobine se comporte comme un fil ($U = 0$).

1.3.2 Aspect énergétique

La puissance reçue par la bobine est $P = Ui$ donc :

$$P = U \times i = L\frac{di}{dt} \times i = \frac{d\frac{Li^2}{2}}{dt}$$

On en déduit que l'énergie accumulée dans un condensateur est :

$$E = \frac{1}{2}Li^2.$$

L'énergie étant une grandeur continue du temps, on en déduit que :

Le courant qui traverse une bobine est continu.

2 Régimes transitoires de circuits du premier ordre avec condensateur

2.1 Exemple

☕

Décharge d'un condensateur pour RC série

✍ ⏲ 5 min

On fait l'acquisition de la tension aux bornes d'un condensateur lors de sa décharge. On montre les deux régimes : les deux régimes permanents (continus) et le régime transitoire. On refait ensuite la même acquisition en prenant la tension aux bornes de la résistance pour visualiser la discontinuité du courant.

On peut caractériser le régime transitoire par la donnée du **temps caractéristique** τ avec la méthode de la tangente à l'origine. En théorie le régime transitoire a une durée infinie, en pratique on retient que le transitoire est fini au bout de 3τ (on est alors à 95 %) ou 5τ (99 %).

On vérifie qu'on est bien dans l'ARQS en mesurant τ, qui doit être tel que $\frac{1}{\tau} \ll \frac{c}{l_0}$.

2.2 Etude mathématique du circuit RC en série

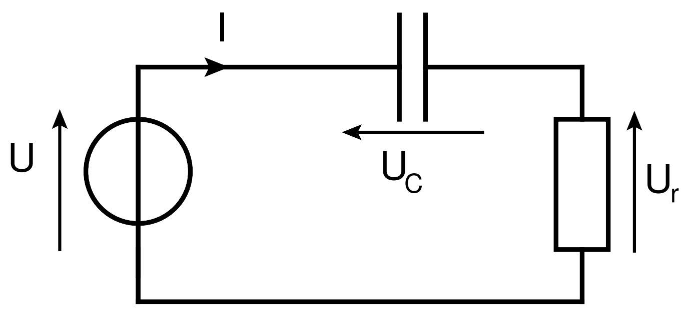


Figure 1 – Circuit RC série dont on effectue l'étude.

2.2.1 Prévision des valeurs

On considère qu'on coupe l'alimentation à l'instant $t = 0$.

On cherche à exprimer ce qui s'appelle les **conditions initiales**, c'est-à-dire quelles sont les valeurs à $t = 0^+$, et en particulier est-ce qu'il y a une discontinuité ?

Juste avant qu'on ne coupe l'alimentation, on est en régime continu, le condensateur agit donc comme un interrupteur ouvert et le courant dans le circuit est nul $i(t = 0^-) = 0$. On a donc $U_r(t = 0^-) = 0$ et donc d'après la loi des mailles $U_C(t = 0^-) = U$.

Juste après que l'alimentation a été coupée, la tension aux bornes du condensateur est $U_C(t = 0^+) = U_C(t = 0^-) = U$ puisque la tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue.

Si on applique la loi des mailles, on a $U_r(t = 0^+) = -U_C(t = 0^+) = -U$, donc $i(t = 0^+) = -U/R$: il y a discontinuité du courant.

En régime permanent $t = \infty$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert donc $U_c(t = \infty) = 0$ et $U_r(t = \infty) = 0$ et $i(t = \infty) = 0$.

2.2.2 Mise en équation

Après que l'alimentation a été coupée, on a :

$$\begin{aligned} U_c(t) + U_r(t) &= 0 \\ U_r(t) &= Ri(t) \\ i(t) &= C\frac{dU_c}{dt} \end{aligned}$$

On obtient donc l'équation différentielle qui régit le circuit :

$$U_c(t) + RC\frac{dU_c}{dt} = 0.$$

Si on pose $\tau = RC$, on peut réécrire cette équation sous la forme canonique (c'est-à-dire la forme qu'on doit essayer de retrouver à chaque fois, en posant éventuellement un autre τ plus compliqué) :

$$\frac{dU_c}{dt} + \frac{U_c(t)}{\tau} = 0.$$

On peut vérifier que cette équation est bien homogène.

2.2.3 Résolution

Les fonctions qui sont solutions d'une équation différentielle mise sous cette forme canonique sont à connaitre par cœur et sont :

$$U_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La valeur de A est une constante qu'il faut déterminer en fonction des conditions initiales. On sait que $U_c(t=0) = U$, donc on déduit :

$$U_c(t) = Ue^{-\frac{t}{\tau}}.$$

On peut déterminer aussi $i(t)$:

$$i(t) = C\frac{dU_c}{dt} = \frac{-CU}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{-U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Il y a donc bien la discontinuité attendue.

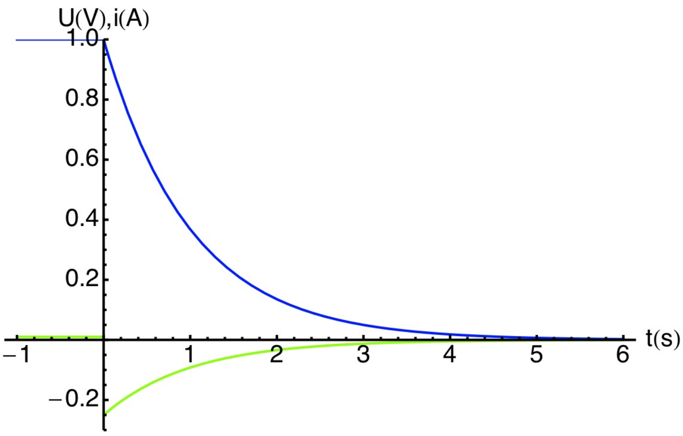


Figure 2 – Solutions de l'équation différentielle. La tension $U_c(t)$ est en bleu, le courant $i(t)$ en vert. On a pris comme valeurs pour cette modélisation U = 1 V, R = 4 Ω et C = 0,25 F, donc un temps caractéristique de 1 s.

2.2.4 Temps caractéristique

La valeur de τ régit la vitesse de la décharge du condensateur.

Au bout d'une durée $t = \tau$, la tension aux bornes du condensateur est passée de U à $\frac{U}{e}$: quelque soit la valeur imposée par le générateur avant de le débrancher, au bout du temps τ, elle a été diminuée de 63 %.

Au bout d'une durée $t = 3\tau$, la tension aux bornes du condensateur est passée de U à $\frac{U}{e^3}$: quelque soit la valeur imposée par le générateur avant de le débrancher, au bout du temps 3τ, elle a été diminuée de 95 %.

Au bout d'une durée $t = 5\tau$, la tension aux bornes du condensateur est passée de U à $\frac{U}{e^5}$: quelque soit la valeur imposée par le générateur avant de le débrancher, au bout du temps τ, elle a été diminuée de 99 %.

Ces trois seuils permettent de calculer la valeur de τ en mesurant au bout de combien de temps la tension n'atteint plus que 37, 5 ou 1 % de sa valeur initiale.

Une autre méthode consiste à tracer la tangente à la courbe $U(t)$ pour $t = 0^+$. On obtient alors la courbe d'équation :

$$y = U - t\frac{dU_c}{dt} = U(1 - \frac{t}{\tau})$$

Ainsi, la tangente coupe l'intersection de la tangente et de la droite horizontale avec la valeur constante atteinte à l'infini (ici 0) pour une valeur de $t = \tau$.

2.3 Charge d'un condensateur, réponse à un échelon

On considère le même circuit mais en considérant que l'on branche l'alimentation à $t = 0$.

2.3.1 Prévision des valeurs

Juste avant qu'on ne branche l'alimentation, on est en régime continu, le condensateur agit donc comme un interrupteur ouvert et le courant dans le circuit est nul $i(t = 0^-) = 0$. On a donc $U_r(t = 0^-) = 0$ et donc d'après la loi des mailles $U_C(t = 0^-) = 0$.

Juste après que l'alimentation a été branchée, la tension aux bornes du condensateur est $U_C(t = 0^+) = U_C(t = 0^-) = 0$ puisque la tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue.

Si on applique la loi des mailles, on a $U_r(t = 0^+) = U - U_C(t = 0^+) = U$, donc $i(t = 0^+) = U/R$: il y a discontinuité du courant.

En régime permanent $t = \infty$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert donc $U_c(t = \infty) = U$ et $U_r(t = \infty) = 0$ et $i(t = \infty) = 0$.

2.3.2 Mise en équation

Pendant le régime transitoire, on a :

$$\begin{aligned} U_c(t) + U_r(t) &= U \\ U_r(t) &= Ri(t) \\ i(t) &= C\frac{dU_c}{dt} \end{aligned}$$

On obtient donc l'équation différentielle qui régit le circuit :

$$U_c(t) + RC\frac{dU_c}{dt} = U.$$

Si on pose $\tau = RC$, on peut réécrire cette équation sous la forme canonique (c'est-à-dire la forme qu'on doit essayer de retrouver à chaque fois, en posant éventuellement un autre τ plus compliqué) :

$$\frac{dU_c}{dt} + \frac{U_c(t)}{\tau} = \frac{U}{\tau}.$$

Cette équation est bien homogène.

2.3.3 Résolution

Nous avons ici une équation différentielle linéaire avec second membre. L'ensemble des solutions de cette équation se mettent sous la forme d'une **solution particulière** à laquelle on ajoute la **solution générale** de la même équation **sans second membre**.

La solution générale est donc connue, il s'agit de $U_{c,g}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$. Comme solution particulière, on peut prendre la valeur constante $U_{c,p} = U$ puisque sa dérivée est nulle.

La solution de l'équation est donc de la forme $U_c(t) = U - Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

On regarde alors les conditions initiales et on trouve la valeur de la constante $A = U$.

On obtient donc pour la tension aux bornes du condensateur qui se charge :

$$U_c(t) = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Cette formule décrit bien le comportement attendu $U_c(t = 0^+) = 0$ et $U_c(t = \infty) = U$.

On déduit le courant de la formule $i(t) = C\frac{dU_c}{dt}$:

$$i(t) = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2.3.4 Interprétation et temps caractéristique

Cette solution est la somme de deux termes, un constant (U) qui est la solution particulière et qui correspond au **régime permanent** et un second terme qui varie en fonction du temps ($-Ue^{-\frac{t}{\tau}}$) et qui fait la transition entre les valeurs des deux régimes permanents ($t < 0$ et $t \to infty$), le **régime transitoire**.

On peut ici dans ce cas aussi regarder les valeurs particulières que prend la tension aux temps τ, 3τ et 5τ :

$$\begin{aligned} U(\tau) &= 0,63\ U \\ U(3\tau) &= 0,95\ U \\ U(5\tau) &= 0,99\ U \end{aligned}$$

Enfin, on peut aussi tracer la tangente à l'origine, d'équation $y = 0 + t\frac{dU_c}{dt} = U\frac{t}{\tau}$, qui coupe la droite horizontale correspondant au régime permanent $U_c = U$ au bout du temps $t = \tau$.

En théorie, le régime transitoire ne se termine jamais puisque $e^{-\frac{t}{\tau}} > 0$. Toutefois en pratique, on considère qu'il est terminé au bout de 3 ou 5 fois le temps caractéristique.

2.3.5 Bilan énergétique

Durant la charge, la puissance fournie par le générateur est d'une part consommée dans la résistance et d'autre part stockée dans le condensateur.

La puissance fournie par le générateur est :

$$P_G(t) = U \times i(t) = \frac{U^2}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La puissance fournie décroit donc avec le temps. On trouve aussi la puissance stockée

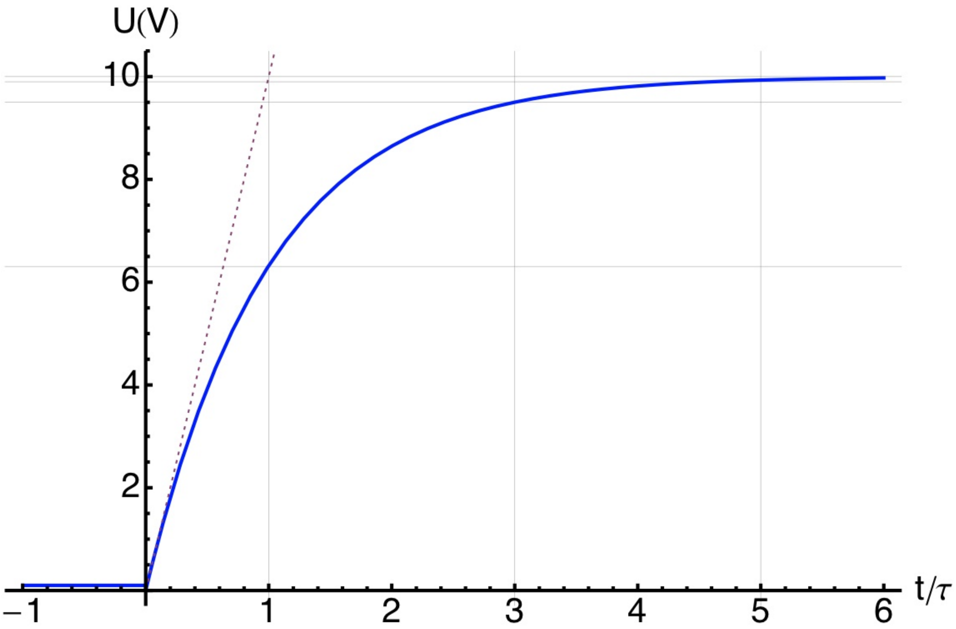


Figure 3 – Tension $U_c(t)$ en bleu lors de la charge d'un condensateur, la tension appliquée par le générateur est de 10 V. En pointillés, la tangente à l'origine, et des lignes parallèles aux axes sont tracés pour $t = \tau$, $t = 3\tau$ et $t = 5\tau$, ainsi qu'à $U = 6,3$ V, $U = 9,5$ V, $U = 9,9$ V et $U = 10$ V.

par le condensateur P_c et celle dissipée par la résistance P_R :

$$P_C(t) = U_c(t) \times i(t) = \frac{U^2}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \text{et} \qquad P_R(t) = Ri^2(t) = \frac{U^2}{R}e^{-2\frac{t}{\tau}}$$

On peut vérifier $P_G(t) = P_C(t) + P_R(t)$.

En termes d'énergie, on sait que la puissance est la dérivée de l'énergie par rapport au temps. On inverse la relation et l'énergie cédée par le générateur à la fin de la charge est :

$$E_G = \int_0^{+\infty} P_G(t)dt = \frac{U^2\tau}{R}(-0+1) = CU^2$$

L'énergie stockée dans le condensateur est simplement $E_C = \frac{1}{2}CU^2$ puisque la tension a ses bornes atteint U à la fin de la charge.

L'énergie dissipée dans la résistance est :

$$E_R = \int_0^{+\infty} P_R(t)dt = \frac{U^2\tau}{2R}(-0+1) = \frac{1}{2}CU^2.$$

Conclusion : quelle que soit la valeur de la résistance, la moitié de l'énergie fournie par le générateur durant la charge est dissipée par effet Joule. L'énergie accumulée dans le condensateur ne dépend pas non plus de la résistance et vaut uniquement la moitié de l'énergie fournie par le générateur.

2.4 Un circuit plus complexe

On considère un circuit composé d'un interrupteur en série avec une résistance R_0 et un bloc composé condensateur C et d'une résistance R en parallèle, le tout alimenté par un générateur de tension idéal U. A $t = 0$ on ferme l'interrupteur.

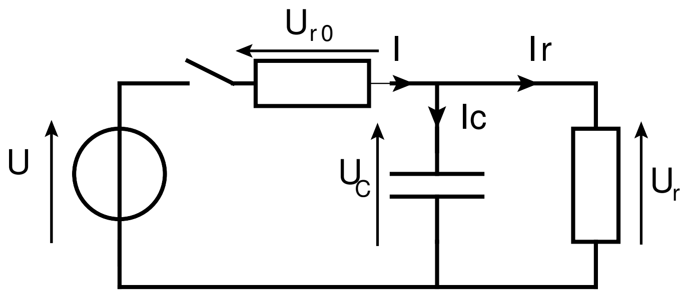


Figure 4 – Deuxième circuit RC série dont on effectue l'étude.

2.4.1 Prévision du comportement

On peut alors regarder ce qu'il se passe à $t = 0^+$:

$$\begin{aligned}
\text{Par continuité de la tension aux bornes du condensateur :} \quad & U_C(t = 0^+) = 0 \\
\text{Par la loi des mailles :} \quad & U_R(t = 0^+) = 0 \\
\text{Par la loi des mailles :} \quad & U_{R0}(t = 0^+) = U \\
\text{Par la loi d'Ohm :} \quad & i(t = 0^+) = \frac{U}{R_0} \text{ et } i_r(t = 0^+ \\
\text{Par la loi des nœuds :} \quad & i_c(t = 0^+) = \frac{U}{R_0}
\end{aligned}$$

On peut aussi prédire le comportement du régime permanent, le condensateur est alors équivalent à un coupe-circuit. On a donc les deux résistances qui sont en série parcourues par le courant I puisque $I_c = 0$. On a alors un pont diviseur de tension et $U_C(\infty) = \frac{R}{R+R_0}U$.

On a donc les conditions initiales, et on devine bien qu'il va y avoir un régime transitoire qui va faire varier continument U_c de sa valeur initiale nulle à la valeur $\frac{R}{R+R_0}U$.

2.4.2 Résolution

On a à tout instant $t > 0$ les relations :

$$\begin{aligned}
i(t) &= i_c(t) + i_r(t) \\
U &= U_{R0}(t) + U_c(t) \\
i(t) &= \frac{U_{R0}(t)}{R_0} \\
i_r(t) &= \frac{U_R(t)}{R} = \frac{U_c(t)}{R} \\
i_c(t) &= C\frac{dU_c(t)}{dt}
\end{aligned}$$

Ce système d'équation nous fournit l'équation différentielle suivie par $U_c(t)$:

$$\frac{dU_c}{dt} + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}\right)U_c(t) = \frac{U}{R_0}.$$

En posant $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}\right)$, on retombe sur le problème déjà vu pour la charge du condensateur, donc il n'y a pas besoin de refaire tous les calculs, on peut adapter directement les résultats pour trouver :

$$U_C(t) = \frac{R}{R+R_0}U\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

3 Régimes transitoires de circuits du premier ordre avec bobine

3.1 Etude du circuit RL série en régime libre

On étudie le circuit suivant, le générateur de tension a sa tension qui était à la valeur U depuis très longtemps qui passe à 0 au temps $t = 0$.

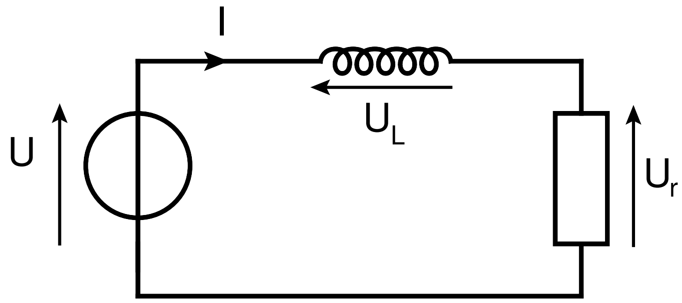


Figure 5 – Circuit RL série dont on effectue l'étude.

3.1.1 Prévision des valeurs

Juste avant qu'on ne coupe l'alimentation, on est en régime continu, la bobine agit donc comme un interrupteur fermé et la tension à ses bornes est nulle. On a donc $U_r(t=0^-) = U$ et donc d'après la loi d'Ohm $i(t=0^-) = \frac{U}{R}$.

Juste après que l'alimentation a été coupée, le courant qui traverse la bobine est $i(t=0^+) = i(t=0^-) = \frac{U}{R}$ puisque le courant qui traverse une bobine est toujours continu.

Si on applique la loi des mailles, on a $U_L(t=0^+) = -U_r(t=0^+) = -U$: il y a discontinuité de la tension aux bornes de la bobine.

En régime permanent $t = \infty$, la bobine se comporte comme un interrupteur fermé donc $U_L(t=\infty) = 0$ et $U_r(t=\infty) = 0$ et $i(t=\infty) = 0$.

3.1.2 Mise en équation

Après que l'alimentation a été coupée, on a :

$$\begin{aligned} U_L(t) + U_r(t) &= 0 \\ U_r(t) &= Ri(t) \\ U_L(t) &= L\frac{di}{dt} \end{aligned}$$

On obtient donc l'équation différentielle qui régit le circuit :

$$L\frac{di}{dt} + Ri(t) = 0.$$

Si on pose $\tau = \frac{L}{R}$, on peut réécrire cette équation sous la forme canonique :

$$\frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = 0.$$

On peut vérifier que cette équation est bien homogène.

3.1.3 Résolution

On trouve donc que le courant peut s'écrire pour $t > 0$ sous la forme :

$$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

avec la condition initiale $i(t = 0^+) = \frac{U}{R}$, on trouve donc pour $i(t > 0)$:

$$i(t) = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

On en déduit la tension aux bornes de la bobine et de la résistance :

$$\begin{aligned} U_L(t) &= L\frac{di}{dt} = \frac{-LU}{R\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = -Ue^{-\frac{t}{\tau}}, \\ U_r(t) &= Ri(t) = Ue^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

Puisque $i(t)$ suit la même équation différentielle du premier ordre sans second membre (il suffit juste de prendre le bon τ), il y a de très grande similarités entre les circuits RC et RL.

On observera donc une fois encore le même comportement exponentiellement décroissant sur un temps caractéristique τ. Il y aura donc eu une chute de l'intensité de 37 % après le temps τ, de 95 % après 3τ et de 99 % après 5τ.

Si on trace la tangente à $i(t)$ en $t = 0$, cette droite coupe l'axe des abscisses en $t = \tau$.

3.2 Réponse à un échelon du circuit RL parallèle

On considère un circuit composé d'une source de courant branchée sur un bloc constitué d'une résistance en série suivie d'une bobine et d'une résistance en parallèle, et la source de courant est nulle pour $t < 0$, et prend la valeur I à partir de

$t = 0$.

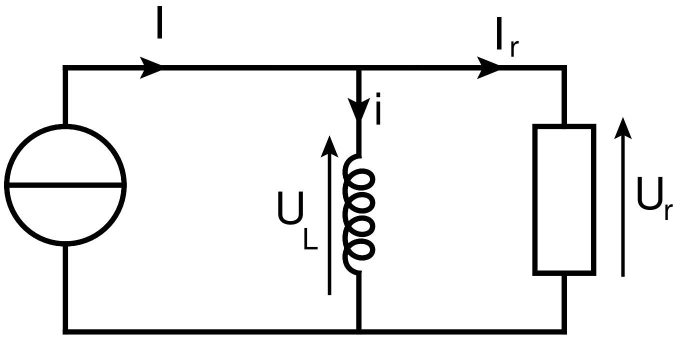


Figure 6 – Circuit RL parallèle dont on effectue l'étude.

3.2.1 Prévision des valeurs

Juste avant qu'on ne branche l'alimentation, on est en régime continu, la bobine agit donc comme un interrupteur fermé et la tension à ses bornes est nulle.

Juste après que l'alimentation a été branchée, le courant qui traverse la bobine est $i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0$ puisque le courant qui traverse une bobine est toujours continu.

Si on applique la loi des mailles, on a $U_L(t = 0^+) = U_r(t = 0^+) = RI_r = RI$.

En régime permanent $t = \infty$, la bobine se comporte comme un interrupteur fermé donc $U_L(t = \infty) = 0$ et $U_r(t = \infty) = 0$ et $i(t = \infty) = I$.

3.2.2 Mise en équation

Après que l'alimentation a été branchée, on a :

$$\begin{aligned}
i(t) + I_r(t) &= I \\
U_r(t) &= RI_r(t) \\
U_L(t) &= L\frac{di}{dt} \\
U_r(t) &= U_L(t)
\end{aligned}$$

On obtient donc l'équation différentielle qui régit le circuit :

$$L\frac{di}{dt} + Ri(t) = RI.$$

Si on pose $\tau = \frac{L}{R}$, on peut réécrire cette équation sous la forme canonique :

$$\frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{I}{\tau}.$$

On peut vérifier que cette équation est bien homogène.

3.2.3 Résolution

On trouve donc que le courant peut s'écrire pour $t > 0$ sous la forme d'une solution particulière correspondant au régime continu et d'une solution générale correspondant au régime transitoire :

$$i(t) = I + Ae^{-\frac{t}{\tau}},$$

avec la condition initiale $i(t = 0^+) = 0$, on trouve donc pour $i(t > 0)$:

$$i(t) = I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

On en déduit la tension aux bornes de la bobine et de la résistance :

$$\begin{aligned} U_r(t) = U_L(t) &= L\frac{di}{dt} = \frac{LI}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = RIe^{-\frac{t}{\tau}}, \\ I_r(t) &= \frac{U_r(t)}{R} = Ie^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

3.2.4 Aspect énergétique

La puissance fournie par le générateur, emmagasinée dans la bobine et dissipée dans la résistance durant cette charge sont respectivement :

$$\begin{aligned} P_g(t) = U(t)I &= RI^2e^{-\frac{t}{\tau}} \\ P_L(t) = U(t)i(t) &= RI^2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} \\ P_r(t) = U(t)I_r(t) &= RI^2e^{-\frac{2t}{\tau}} \end{aligned}$$

On peut vérifier qu'à tout instant t on a bien $P_g(t) = P_L(t) + P_r(t)$.

En termes d'énergie, on peut intégrer de $t = 0$ à l'infini, bien que pour la bobine le résultat soit plus simple puisque l'énergie emmagasinée est $E_L = \frac{1}{2}Li(t=\infty)^2$. On trouve en particulier :

$$\begin{aligned} E_g &= \int_0^\infty P_g(t)dt = RI^2\tau = LI^2 \\ E_L &= \int_0^\infty P_L(t)dt = \frac{LI^2}{2} \\ E_R &= \int_0^\infty P_r(t)dt = RI^2\frac{\tau}{2} = \frac{LI^2}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : quelle que soit la valeur de la résistance, la moitié de l'énergie fournie par le générateur de courant durant la charge est dissipée par effet Joule. L'énergie accumulée dans la bobine ne dépend pas non plus de la résistance et vaut uniquement la moitié de l'énergie fournie par le générateur.