Mécanique 4
Solide en rotation autour d'un axe fixe.

Table des matières

Nous avons pour l'instant étudié qu'un seul type d'étude dynamique : celle d'un point matériel. Cette étude peut se généraliser simplement au cas des solides en translations, en faisant l'étude d'un point matériel ayant une masse égale à celle du solide et confondu avec son centre de gravité. Toutefois l'étude d'un solide (par exemple le vilebrequin d'un moteur) n se résume pas au mouvement de son centre de gravité, des rotations peuvent venir s'ajouter à ce mouvement. Nous allons dans ce chapitre essayer de décrire la mécanique du solide dans certains cas simples, en particulier la rotation d'un solide autour d'un axe fixe (donc pas de roue de moto dans un virage...).

1 Mouvements d'un solide (cinématique)

1.1 Définitions

Rappel

On appelle en mécanique un solide un système tel que pour tout couple de points du système A et B, la distance AB reste constante au cours du mouvement.

C'est différent de l'état solide que l'on étudie lors des changements d'état (par exemple de la neige fraiche est solide au sens thermodynamique mais pas au sens mécanique : on peut la compacter en marchant dessus).

Comment faire le lien entre mécanique du solide et mécanique du point ?

On associe à chaque volume infinitésimal $d\tau$ du solide un point matériel M de masse $dm = \rho d\tau$.

On fait la somme sur tous les ponts matériels créés, et lorsque $d\tau \to 0$, on arrive à une intégrale, ce qui correspond mathématiquement à une distribution continue.

Exemple : On a vu que pour un système de plusieurs points matériels M_i de masse m_i, le centre de masse de masse G est tel que $\vec{OG} = \frac{\sum_i m_i \vec{OM_i}}{\sum_i m_i}$. Dans le cas d'un solide, on va trouver comme centre de masse :

$$\vec{OG} = \frac{\int_V \rho(M)\vec{OM}d\tau}{\int_V \rho(M)d\tau}.$$

1.2 Mouvement d'un solide

A chaque solide on peut associer un repère, et donc un référentiel. On peut imaginer "dessiner" sur le solide 1 origine et trois vecteurs non coplanaires, et on peut alors repérer tous les points de l'espace.

Mathématiquement, un repère est défini par trois points d'un solide.

Etudions maintenant le mouvement du solide dans le référentiel $\mathcal{R}$.

- Si les trois axes du solide restent tout le temps parallèles entre eux dans $\mathcal{R}$, le solide est en **translation**. Alors tous les points du solide ont le même vecteur-vitesse dans $\mathcal{R}$, donc seule la vitesse de O (par exemple) est nécessaire pour connaitre la vitesse de chaque point du solide $\forall M \in solide,\ \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(0)$.

  Encore une fois, la translation peut être rectiligne (voiture sur autoroute), circulaire (cabine de grande roue, référentiel géocentrique par rapport au référentiel de Copernic) ou de manière plus générale curviligne.

- sinon, le mouvement est composé d'une translation et de trois rotations autour d'axes fixes (nutation, précession et rotation propre). Par exemple, la grade roue est en rotation autour de son axe par rapport au référentiel terrestre, la tablette de dossier dans un avion est en rotation par rapport à l'avion, etc

On va se concentrer dans ce chapitre uniquement aux mouvements de **rotations autour d'un axe fixe**. Pour caractériser une telle rotation, il nous faut donner l'axe de rotation et la vitesse angulaire de la rotation.

La vitesse d'un point M du solide est alors donné par $v(M) = R\omega$ où on a appelé R la distance de M à l'axe de rotation et ω la vitesse de rotation du solide par rapport au référentiel.

On peut condenser les deux informations sur la rotation (axe et vitesse) en un vecteur, le **vecteur rotation**, $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire définissant l'axe de rotation.

Par exemple, vous avez vu en SI la loi de composition des vitesses, si A est un point de l'axe de rotation, pour tout point B du solide, on a $\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}$ (moyen mnémotechnique : babar).

2 Moment cinétique

2.1 Moment d'inertie

On a vu dans le cas des points matériels que la grandeur qui s'opposait au mouvement lorsqu'on applique est une force est la masse : plus la masse du système est importante, plus son accélération sera faible quand on lui applique la même force $\vec{F}$, donc plus le système gardera son mouvement.

Dans le cas des rotations, on ne peut plus utiliser la masse. Intuitivement, supposons que l'on veuille faire tourner autour d'une axe une barre à mine. Elle a toujours la même masse, mais il est plus facile de la faire tourner si son axe est le long de la barre que s'il est perpendiculaire. Et même quand il est perpendiculaire, il est plus simple de la faire tourner si l'axe est au milieu de la barre que s'il est à une extrémité.

> La grandeur qui mesure la résistance à la rotation au tour d'un axe Δ d'un système est son moment d'inertie par rapport à cet axe J_Δ.

- qualitativement : pour la barre à mine d'axe Δ de rayon R et de longueur L, si on appelle Δ_1 (resp. Δ_2) l'axe perpendiculaire à la barre situé au centre (resp. au bord) de la barre, $J_\Delta < J_{\Delta_1} < J_{\Delta_2}$.
- quantitativement : $J_\Delta = \frac{1}{2}mR^2$, $J_{\Delta_1} = \frac{1}{12}mL^2$, $J_{\Delta_2} = \frac{1}{3}mL^2$.
- Unité de J : $[J] = \text{kg.m}^2$.
- J_Δ est une grandeur additive, c'est pourquoi le moment d'inertie d'un pendule pesant constitué d'une tige de longueur L et de masse m' au bout de laquelle on place une masse m a un moment d'inertie $J = \frac{1}{3}m'L^2 + mL^2$
- pour une masse ponctuelle m situé à r de l'axe de rotation, $J = mr^2$
- pour un solide, $J = \int_V \rho r^2 d\tau$

2.2 Moment cinétique

De la même manière que pour les points matériels, la quantité importante pour regarder l'effet d'une force n'est ni la masse ni la vitesse mais la quantité de mouvement, pour la rotation d'un solide ce n'est ni le moment d'inertie, ni la vitesse angulaire.

Définition

On appelle moment cinétique d'un solide autour d'une axe Δ la quantité $L_\Delta = J_\Delta \omega$ où J_Δ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ et ω la vitesse de rotation.

Notes :

- $J_\Delta \geqslant 0$ mais ω peut être négatif (on compte les rotations positives confomément au sens de l'axe Δ, en utilisant la règle du tire-bouchon ou de la main droite), donc L_Δ peut être positif ou négatif ;
- $[L_\Delta] = \text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$

Hors programme : il s'agit en fait de la projection le long de l'axe Δ du vecteur $\vec{L_O} = O\vec{M} \wedge \vec{p}$ avec O un point de l'axe Δ.

3 Moment d'une force (dynamique)

3.1 Définition

Pour ouvrir une porte (e donc la faire tourner, c'est-à-dire lui transférer du moment cinétique) avec une force constante (par exemple 5 N), on a plusieurs options :

- on peut changer le point d'application de la force, plus ou moins près des gonds
- on peut changer la direction de la force, de perpendiculaire à la porte à parallèle

Intuitivement, on sait que la manière la plus efficace est d'appliquer la force le plus loin possible des gonds (c'est d'ailleurs là où est la poignée), et si possible perpendiculairement à la porte.

La quantité permettant de changer le moment cinétique autour d'un axe d'un solide est le moment d'une force par rapport à cet axe.

Définition

Le **moment d'une force $\vec{F}$ par rapport un axe Δ** est obtenu par la formule $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm F_\perp d$ où $F_\perp$ est la norme de la composante de la force perpendiculaire à l'axe et d le bras de levier (la distance entre l'axe Δ et la direction de $\vec{F}$). Le signe se détermine en regardant dans quel sens la force fait tourner le solide.

Le moment d'une force est donc nul si la droite d'action de la direction de la force coupe l'axe Δ.

Hors programme : on définit en fait le moment par rapport à un point O d'une force $\vec{F}$ de point d'application M par rapport à un point O : $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$.

Le moment de cette force par rapport à un axe Δ passant par O et dirigé par le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$ est $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}).\vec{u}_\Delta$.

Retour sur la porte étudiée :

- Si la force s'exerce à 5 cm des gonds et perpendiculaire à la porte, $d = 5$ cm, donc $M_z(\vec{F}) = 0,25$ N.m ;
- si la force s'exerce près du bord de la porte, à 1 m de distance, et perpendiculairement à la porte, $M_z(\vec{F}) = 5$ N.m ;
- si la force s'exerce près du bord de la porte, à 1 m de distance, et parallèlement à la porte, $M_z(\vec{F}) = 0$ N.m ;
- si la force s'exerce près du bord de la porte, à 1 m de distance, et avec un angle α avec la porte, $M_z(\vec{F}) = 5 \sin\alpha$ N.m.

Ainsi, le moment exercé par la force le long de la direction verticale est bien maximal quand on l'applique perpendiculairement à la porte et le plus loin possible de l'axe de rotation.

3.2 Couple

Lors de la mécanique du point, on avait défini la résultante de forces comme la somme des vecteurs-force appliqués $\vec{F} = \sum_i \vec{F_i}$, et on avait vu que dans un référentiel galiléen, la dérivée de la quantité de mouvement était égale à cette résultante de forces.

Toutefois, on vient de voir que la loi de la quantité de mouvement ne pouvait prédire que le mouvement du centre de masse d'un solide. Ainsi, un solide pseudo-isolé (la résultante des forces est nulle) immobile à l'état initial dans un référentiel galiléen a son centre de masse immobile tout au long du mouvement. Par contre, ce solide peut être mis en rotation si les deux forces ont des moments qui s'ajoutent.

On appelle **couple de forces** un ensemble de forces de résultante nulle mais de moment non-nul.

Un couple de forces est nécessairement composé d'au moins deux forces. Exemple de couple : clé en croix pour démonter une roue. Les forces appliquées par le garagiste sur chaque extrémité du bras sont de même norme F, perpendiculaire au bras de longueur $d/2$ et de sens opposés. Les deux moments par rapport à l'axe du boulon sont égaux Fd, donc le moment total est $Fd \neq 0$.

3.3 Liaison pivot

Une liaison pivot est comme vous l'avez vu en SI une liaison permettant la rotation d'un solide autour d'un autre, par exemple les gonds d'une porte.

Dans le cas idéal (sans frottement), les forces exercées par le stator sur le rotor passent pas l'axe de rotation, donc leur moment est nul.

Le moment des forces exercées par une liaison pivot par rapport à l'axe de rotation Δ est nul $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{pivot}) = 0$.

4 Théorème du moment cinétique

4.1 Enoncé

Théorème du moment cinétique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée du moment cinétique par rapport à un axe d'un solide S est égale à au moment par rapport à cet axe de toutes les forces extérieures appliquées au solide : $\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$.

Exemples : en SI, la vitesse de rotation d'un moteur évolue comme $J\frac{d\omega}{dt} = \sum \Gamma$. En deuxième année en SI, vous verrez l'égalité entre torseur cinématique et torseur dynamique (ou statique) : le théorème du moment cinétique est la deuxième partie de cette égalité (la première étant le PFD appliqué au centre de gravité du solide).

4.2 Application à la poulie sans masse

Pour une poulie parfaite (sans frottement) de rayon R et sans masse, on a $J = 0$ (la masse est nulle), donc si on appelle T_1 et T_2 la tension de chaque côté de la poulie, le théorème du moement cinétique donne :

$$J\dot{\omega} = RT_1 - RT_2 = 0,$$

on a donc $T_1 = T_2$: la poulie transmet les tensions, comme attendu.

4.3 Pendule pesant

On considère un pendule pesant constitué d'une tige homogène de masse m et de longueur $L = 1,0$ m.

On applique le TMC :

$$J\dot{\omega} = -mg\frac{L}{2}\sin\theta$$

avec $J = \frac{1}{3}mL^2$ et en faisant attention au point d'application du poids (au centre de gravité de la tige).

Aux petits angles, on trouve $\ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\theta = 0$ donc une période d'oscillation $T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} \simeq 1,6$ s qui est plus petite que les deux secondes trouvées dans le cas du pendule simple de longueur L.

En fait on vient de voir que ce problème est équivalent à un pendule simple où toute la masse serait concentrée aux 2/3 du fil.

5 Approche énergétique

5.1 Définitions

5.1.1 Puissance et travail d'une force appliquée à un solide en rotation

Calculons la puissance d'une force $\vec{F}$ s'appliquant en M d'un solide en rotation autour de l'axe Δ passant par O.

Alors $P(\vec{F}) = \vec{F}\vec{v} = (F_r\vec{u}_r + F_\theta\vec{u}_\theta + F_\Delta\vec{u_\Delta}).(r\dot{\theta}\vec{u}_\theta) = F_\theta r\dot{\theta}$. D'un autre côté on a $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = F_\perp d = F_\theta r\cos\theta$. Or $F_\theta = F_\perp\cos\theta$, on a donc $P(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})\dot{\theta}$.

Définition

La puissance d'une force $\vec{F}$ appliquée à un solide S en rotation autour d'un axe fixe Δ à la vitesse angulaire ω est $P(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})\omega$.

On peut alors maintenant calculer le travail en intégrant la puissance entre les instants t_1 et t_2 :

$$W_{1\to 2}(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})\omega dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathcal{M}_\Delta(\vec{F})d\theta.$$

5.1.2 Energie cinétique

Calculons l'énergie cinétique d'un solide en rotation à la vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe Δ passant par O :

$$E_c = \int_S \frac{1}{2}\rho v^2(M)d\tau = \int_S \rho r^2\omega^2 d\tau = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2.$$

Définition

L'énergie cinétique d'un solide S en rotation autour d'un axe fixe Δ à la vitesse angulaire ω est $E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$.

5.2 Lois de variation

Pour un solide en rotation, on peu écrire une loi reliant la dérivée de son énergie cinétique et la puissance des forces extérieures.

Loi de la puissance cinétique pour un solide

Dans un référentiel galiléen, la dérivée de l'énergie cinétique d'un solide est égale à la somme des puissances des forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i P(\vec{F_i}).$$

En intégrant cette relation entre deux instants t_1 et t_2, on obtient la variation d'énergie cinétique comme somme des travaux des forces appliquées.

Loi de l'énergie cinétique pour un solide

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un solide entre deux instants t_1 et t_2 est égale à la somme des travaux des forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\Delta E_c = E_c(t_2) - E_c(t_1) = \sum_i W_{1\to 2}(\vec{F_i}).$$

Application au pendule pesant de tige homogène de masse m et de longueur L :

- l'énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$, donc sa dérivée est $\frac{dE_c}{dt} = J\dot{\theta}\ddot{\theta}$;
- la liaison pivot est parfaite, donc son moment autour de l'axe de rotation est nul, et donc sa puissance aussi ;
- le poids a pour point d'application le centre de masse du pendule situé à la distance $d = \frac{L}{2}$ de l'axe de rotation. Lorsque le pendule fait un angle θ avec la verticale, le bras de levier est $d\sin\theta$, donc son moment est $\mathcal{M}(\vec{P}) = -mgd\sin\theta$ et sa puissance $P(\vec{P}) = -mgd\dot{\theta}\sin\theta$
- l'application du théorème de la puissance cinétique donne donc $\frac{dE_c}{dt} = P(\vec{P})$ donc :
$$J\dot{\theta}\ddot{\theta} = mgd\dot{\theta}\sin\theta \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ddot{\theta} + \frac{3g}{2L}\sin\theta = 0,$$
ce qui est équivalent aux équations horaires du mouvement déterminées avec le théorème du moment cinétique.