

MÉCANIQUE 4  
SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Mouvements d'un solide (cinématique)</b>	<b>2</b>
1.1	Définitions . . . . .	2
1.2	Mouvement d'un solide . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Moment cinétique</b>	<b>2</b>
2.1	Moment d'inertie . . . . .	2
2.2	Moment cinétique . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Moment d'une force (dynamique)</b>	<b>3</b>
3.1	Définition . . . . .	3
3.2	Couple . . . . .	4
3.3	Liaison pivot . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Théorème du moment cinétique</b>	<b>4</b>
4.1	Enoncé . . . . .	4
4.2	Application à la poulie sans masse . . . . .	5
4.3	Pendule pesant . . . . .	5
<b>5</b>	<b>Approche énergétique</b>	<b>5</b>
5.1	Définitions . . . . .	5
5.1.1	Energie cinétique . . . . .	5
5.1.2	Puissance et travail d'une force appliquée à un solide en rotation . . . . .	5
5.2	Lois de variation . . . . .	6
5.3	Etude énergétique des systèmes déformables . . . . .	6
5.3.1	Etude énergétique du tabouret d'inertie . . . . .	6
5.3.2	Cas général . . . . .	7
5.3.3	Puissance des forces intérieures . . . . .	7

Nous avons pour l'instant étudié qu'un seul type d'étude dynamique : celle d'un point matériel. Cette étude peut se généraliser simplement au cas des solides en translations, en faisant l'étude d'un point matériel ayant une masse égale à celle du solide et confondu avec son centre de gravité. Toutefois l'étude d'un solide (par exemple le vilebrequin d'un moteur) n se résume pas au mouvement de son centre de gravité, des rotations peuvent venir s'ajouter à ce mouvement. Nous allons dans ce chapitre essayer de décrire la mécanique du solide dans certains cas simples, en particulier la rotation d'un solide autour d'un axe fixe (donc pas de roue de moto dans un virage...).

## 1 Mouvements d'un solide (cinématique)

### 1.1 Définitions

#### Rappel

On appelle en mécanique un solide un système tel que pour tout couple de points du système  $A$  et  $B$ , la distance  $AB$  reste constante au cours du mouvement.

Comment faire le lien entre mécanique du solide et mécanique du point ?

On associe à chaque volume infinitésimal  $d\tau$  du solide un point matériel  $M$  de masse  $dm = \rho d\tau$ .

On fait la somme sur tous les points matériels créés, et lorsque  $d\tau \rightarrow 0$ , on arrive à une intégrale, ce qui correspond mathématiquement à une distribution continue.

Exemple : On a vu que pour un système de plusieurs points matériels  $M_i$  de masse  $m_i$ , le centre de masse de masse  $G$  est tel que  $\vec{OG} = \frac{\sum_i m_i \vec{OM}_i}{\sum_i m_i}$ . Dans le cas d'un solide, on va trouver comme centre de masse :

$$\vec{OG} = \frac{\int_V \rho(M) \vec{OM} d\tau}{\int_V \rho(M) d\tau}.$$

### 1.2 Mouvement d'un solide

A chaque solide on peut associer un repère, et donc un référentiel. On peut imaginer "dessiner" sur le solide 1 origine et trois vecteurs non coplanaires, et on peut alors repérer tous les points de l'espace.

Mathématiquement, un repère est défini par trois points d'un solide.

Etudions maintenant le mouvement du solide dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

- Si les trois axes du solide restent tout le temps parallèles entre eux dans  $\mathcal{R}$ , le solide est en **translation**. Alors tous les points du solide ont le même vecteur-vitesse dans  $\mathcal{R}$ , donc seule la vitesse de  $O$  (par exemple) est nécessaire pour connaître la vitesse de chaque point du solide  $\forall M \in \text{solide}$ ,  $\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(O)$ .

Encore une fois, la translation peut être rectiligne (voiture sur autoroute), circulaire (cabine de grande roue, référentiel géocentrique par rapport au référentiel de Copernic) ou de manière plus générale curviligne.

- sinon, le mouvement est composé d'une translation et de trois rotations autour d'axes fixes (nutation, précession et rotation propre). Par exemple, la grande roue est en rotation autour de son axe par rapport au référentiel terrestre, la tablette de dossier dans un avion est en rotation par rapport à l'avion, etc

On va se concentrer dans ce chapitre uniquement aux mouvements de **rotations autour d'un axe fixe**. Pour caractériser une telle rotation, il nous faut donner l'axe de rotation et la vitesse angulaire de la rotation.

La vitesse d'un point  $M$  du solide est alors donné par  $v(M) = R\omega$  où on a appelé  $R$  la distance de  $M$  à l'axe de rotation et  $\omega$  la vitesse de rotation du solide par rapport au référentiel.

On peut condenser les deux informations sur la rotation (axe et vitesse) en un vecteur, le **vecteur rotation**,  $\vec{\Omega} = \omega \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire définissant l'axe de rotation.

Par exemple, vous avez vu en SI la loi de composition des vitesses, si  $A$  est un point de l'axe de rotation, pour tout point  $B$  du solide, on a  $\vec{v}(B) = \vec{v}(A) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}$  (moyen mnémotechnique : babar).

## 2 Moment cinétique

### 2.1 Moment d'inertie

On a vu dans le cas des points matériels que la grandeur qui s'opposait au mouvement lorsqu'on applique est une force est la masse : plus la masse du système est importante, plus son accélération sera faible quand on lui applique la même force  $\vec{F}$ , donc plus le système gardera son mouvement.

Dans le cas des rotations, on ne peut plus utiliser la masse. Intuitivement, supposons que l'on veuille faire tourner autour d'une axe une barre à mine. Elle a toujours la même masse, mais il est plus facile de la faire tourner si son axe est le long de la barre que s'il est perpendiculaire. Et même quand il est perpendiculaire, il est plus simple de la faire tourner si l'axe est au milieu de la barre que s'il est à une extrémité.

La grandeur qui mesure la résistance à la rotation au tour d'un axe  $\Delta$  d'un système est son moment d'inertie par rapport à cet axe  $J_{\Delta}$ .

- qualitativement : pour la barre à mine d'axe  $\Delta$  de rayon  $R$  et de longueur  $L$ , si on appelle  $\Delta_1$  (resp.  $\Delta_2$ ) l'axe perpendiculaire à la barre situé au centre (resp. au bord) de la barre,  $J_{\Delta} < J_{\Delta_1} < J_{\Delta_2}$ .
- quantitativement :  $J_{\Delta} = \frac{1}{2}mR^2$ ,  $J_{\Delta_1} = \frac{1}{12}mL^2$ ,  $J_{\Delta_2} = \frac{1}{3}mL^2$ .
- Unité de  $J$  :  $[J] = \text{kg.m}^2$ .
- $J_{\Delta}$  est une grandeur additive, c'est pourquoi le moment d'inertie d'un pendule pesant constitué d'une tige de longueur  $L$  et de masse  $m'$  au bout de laquelle on place une masse  $m$  a un moment d'inertie  $J = \frac{1}{3}m'L^2 + mL^2$
- pour une masse ponctuelle  $m$  situé à  $r$  de l'axe de rotation,  $J = mr^2$
- pour un solide,  $J = \int_V \rho r^2 d\tau$

## 2.2 Moment cinétique

De la même manière que pour les points matériels, la quantité importante pour regarder l'effet d'une force n'est ni la masse ni la vitesse mais la quantité de mouvement, pour la rotation d'un solide ce n'est ni le moment d'inertie, ni la vitesse angulaire.

### Définition

On appelle moment cinétique d'un solide autour d'une axe  $\Delta$  la quantité  $L_{\Delta} = J_{\Delta}\omega$  où  $J_{\Delta}$  est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe  $\Delta$  et  $\omega$  la vitesse de rotation.

Notes :

- $J_{\Delta} \geq 0$  mais  $\omega$  peut être négatif (on compte les rotations positives conformément au sens de l'axe  $\Delta$ , en utilisant la règle du tire-bouchon ou de la main droite), donc  $L_{\Delta}$  peut être positif ou négatif;
- $[L_{\Delta}] = \text{kg.m}^2.\text{s}^{-1}$

Hors programme : il s'agit en fait de la projection le long de l'axe  $\Delta$  du vecteur  $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge \vec{p}$  avec  $O$  un point de l'axe  $\Delta$ .

## 3 Moment d'une force (dynamique)

### 3.1 Définition

Pour ouvrir une porte (e donc la faire tourner, c'est-à-dire lui transférer du moment cinétique) avec une force constante (par exemple 5 N), on a plusieurs options :

- on peut changer le point d'application de la force, plus ou moins près des gonds
- on peut changer la direction de la force, de perpendiculaire à la porte à parallèle

Intuitivement, on sait que la manière la plus efficace est d'appliquer la force le plus loin possible des gonds (c'est d'ailleurs là où est la poignée), et si possible perpendiculairement à la porte.

La quantité permettant de changer le moment cinétique autour d'un axe d'un solide est le moment d'une force par rapport à cet axe.

### Définition

Le **moment d'une force  $\vec{F}$  par rapport un axe  $\Delta$**  est obtenu par la formule  $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = \pm F_{\perp}d$  où  $F_{\perp}$  est la norme de la composante de la force perpendiculaire à l'axe et  $d$  le bras de levier (la distance entre l'axe  $\Delta$  et la direction de  $\vec{F}$ ). Le signe se détermine en regardant dans quel sens la force fait tourner le solide.

Le moment d'une force est donc nul si la droite d'action de la direction de la force coupe l'axe  $\Delta$ .

Hors programme : on définit en fait le moment par rapport à un point  $O$  d'une force  $\vec{F}$  de point d'application  $M$  par rapport à un point  $O$  :  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = O\vec{M} \wedge \vec{F}$ .

Le moment de cette force par rapport à un axe  $\Delta$  passant par  $O$  et dirigé par le vecteur unitaire  $\vec{u}_\Delta$  est  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$ .

Retour sur la porte étudiée :

- Si la force s'exerce à 5 cm des gonds et perpendiculaire à la porte,  $d = 5$  cm, donc  $M_z(\vec{F}) = 0,25$  N.m ;
- si la force s'exerce près du bord de la porte, à 1 m de distance, et perpendiculairement à la porte,  $M_z(\vec{F}) = 5$  N.m ;
- si la force s'exerce près du bord de la porte, à 1 m de distance, et parallèlement à la porte,  $M_z(\vec{F}) = 0$  N.m ;
- si la force s'exerce près du bord de la porte, à 1 m de distance, et avec un angle  $\alpha$  avec la porte,  $M_z(\vec{F}) = 5 \sin \alpha$  N.m.

Ainsi, le moment exercé par la force le long de la direction verticale est bien maximal quand on l'applique perpendiculairement à la porte et le plus loin possible de l'axe de rotation.

## 3.2 Couple

Lors de la mécanique du point, on avait défini la résultante de forces comme la somme des vecteurs-force appliqués  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ , et on avait vu que dans un référentiel galiléen, la dérivée de la quantité de mouvement était égale à cette résultante de forces.

Toutefois, on vient de voir que la loi de la quantité de mouvement ne pouvait prédire que le mouvement du centre de masse d'un solide. Ainsi, un solide pseudo-isolé (la résultante des forces est nulle) immobile à l'état initial dans un référentiel galiléen a son centre de masse immobile tout au long du mouvement. Par contre, ce solide peut être mis en rotation si les deux forces ont des moments qui s'ajoutent.

On appelle **couple de forces** un ensemble de forces de résultante nulle mais de moment non-nul.

Un couple de forces est nécessairement composé d'au moins deux forces. Exemple de couple : clé en croix pour démonter une roue. Les forces appliquées par le garagiste sur chaque extrémité du bras sont de même norme  $F$ , perpendiculaire au bras de longueur  $d/2$  et de sens opposés. Les deux moments par rapport à l'axe du boulon sont égaux  $Fd$ , donc le moment total est  $Fd \neq 0$ .

## 3.3 Liaison pivot

Une liaison pivot est comme vous l'avez vu en SI une liaison permettant la rotation d'un solide autour d'un autre, par exemple les gonds d'une porte.

Dans le cas idéal (sans frottement), les forces exercées par le stator sur le rotor passent pas l'axe de rotation, donc leur moment est nul.

Le moment des forces exercées par une liaison pivot par rapport à l'axe de rotation  $\Delta$  est nul  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{pivot}) = 0$ .

## 4 Théorème du moment cinétique

### 4.1 Enoncé

#### Théorème du moment cinétique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée du moment cinétique par rapport à un axe d'un solide  $S$  est égale à au moment par rapport à cet axe de toutes les forces extérieures appliquées au solide :  $\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i)$ .

Exemples : en SI, la vitesse de rotation d'un moteur évolue comme  $J \frac{d\omega}{dt} = \sum \Gamma$ . En deuxième année en SI, vous verrez l'égalité entre torseur cinématique et torseur dynamique (ou statique) : le théorème du moment cinétique est la deuxième partie de cette égalité (la première étant le PFD appliqué au centre de gravité du solide).

## 4.2 Application à la poulie sans masse

Pour une poulie parfaite (sans frottement) de rayon  $R$  et sans masse, on a  $J = 0$  (la masse est nulle), donc si on appelle  $T_1$  et  $T_2$  la tension de chaque côté de la poulie, le théorème du moment cinétique donne :

$$J\dot{\omega} = RT_1 - RT_2 = 0,$$

on a donc  $T_1 = T_2$  : la poulie transmet les tensions, comme attendu.

## 4.3 Pendule pesant

On considère un pendule pesant constitué d'une tige homogène de masse  $m'$  et de longueur  $L$  au bout de laquelle est attachée une masse  $m$  ponctuelle .

Le moment d'inertie est alors  $J = \frac{1}{3}m'L^2 + mL^2 = (m + m'/3)L^2$ , le moment cinétique est  $J\dot{\theta}$  et sa dérivée par rapport au temps  $J\ddot{\theta}$ .

Les forces qui s'appliquent au balancier sont

- le poids appliquée à la masse ponctuelle, de moment  $-mg \sin \theta L$  ;
- celui appliqué à la tige, de moment  $-m'g \sin \theta L/2$  ;
- la force due à la liaison pivot parfaite, de moment nul.

On applique le TMC et on obtient  $\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \frac{m+m'/2}{m+m'/3} \sin \theta = 0$ .

On reconnait une équation de pendule simple de longueur  $L' = \frac{m+m'/3}{m+m'/2}L$  donc on peut appliquer les résultats déjà trouvés (par exemple, la période d'oscillation est  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L'}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{m+m'/3}{m+m'/2} \frac{L}{g}}$ ).

On peut aussi vérifier que  $L' \rightarrow L$  quand  $m' \ll m$ , comme attendu puisqu'on est alors dans le cas du pendule simple.

## 5 Approche énergétique

### 5.1 Définitions

#### 5.1.1 Energie cinétique

Calculons l'énergie cinétique d'un solide en rotation à la vitesse angulaire  $\omega$  autour d'un axe fixe  $\Delta$  passant par  $O$  :

$$E_c = \int_S \frac{1}{2} \rho v^2(M) d\tau = \int_S \rho r^2 \omega^2 d\tau = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2.$$

#### Définition

L'énergie cinétique d'un solide  $S$  en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$  à la vitesse angulaire  $\omega$  est  $E_c = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2$ .

#### 5.1.2 Puissance et travail d'une force appliquée à un solide en rotation

Calculons la puissance d'une force  $\vec{F}$  s'appliquant en  $M$  d'un solide en rotation autour de l'axe  $\Delta$  passant par  $O$ .

Alors  $P(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} = (F_r \vec{u}_r + F_\theta \vec{u}_\theta + F_\Delta \vec{u}_\Delta) \cdot (r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = F_\theta r \dot{\theta}$ . D'un autre côté on a  $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = F_\perp d = F_\theta r \cos \theta$ . Or  $F_\theta = F_\perp \cos \theta$ , on a donc  $P(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \dot{\theta}$ .

#### Définition

La puissance d'une force  $\vec{F}$  appliquée à un solide  $S$  en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$  à la vitesse angulaire  $\omega$  est  $P(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \omega$ .

On peut alors maintenant calculer le travail en intégrant la puissance entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  :

$$W_{1 \rightarrow 2}(\vec{F}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F})\omega dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F})d\theta.$$

## 5.2 Lois de variation

Pour un solide en rotation, on peut écrire une loi reliant la dérivée de son énergie cinétique et la puissance des forces extérieures.

### Loi de la puissance cinétique pour un solide

Dans un référentiel galiléen, la dérivée de l'énergie cinétique d'un solide est égale à la somme des puissances des forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i P(\vec{F}_i).$$

En intégrant cette relation entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , on obtient la variation d'énergie cinétique comme somme des travaux des forces appliquées.

### Loi de l'énergie cinétique pour un solide

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un solide entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  est égale à la somme des travaux des forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$\Delta E_c = E_c(t_2) - E_c(t_1) = \sum_i W_{1 \rightarrow 2}(\vec{F}_i).$$

Application au pendule pesant de tige homogène de masse  $m'$  et de longueur  $L$  au bout de laquelle il y a une masse ponctuelle  $m$  :

- l'énergie cinétique est  $E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ , donc sa dérivée est  $\frac{dE_c}{dt} = J\dot{\theta}\ddot{\theta}$  avec  $J = (m + m'/3)L^2$  ;
- le poids appliquée à la masse ponctuelle, de moment  $-mg \sin \theta L$  et donc de puissance  $-mg \sin \theta L \dot{\theta}$  ;
- celui appliqué à la tige, de puissance  $-m'g \sin \theta L/2 \dot{\theta}$  ;
- la liaison pivot est parfaite, donc son moment autour de l'axe de rotation est nul, et donc sa puissance aussi ;
- l'application du théorème de la puissance cinétique donne donc :

$$J\dot{\theta}\ddot{\theta} = -g(m + m'/2)L\dot{\theta} \sin \theta \quad \iff \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \frac{m + m'/2}{m + m'/3} \sin \theta = 0,$$

ce qui est équivalent aux équations horaires du mouvement déterminées avec le théorème du moment cinétique.

## 5.3 Etude énergétique des systèmes déformables

### 5.3.1 Etude énergétique du tabouret d'inertie

Considérons une personne située sur un tabouret libre de tourner et qui porte deux haltères au bout de ses bras tendus. Imaginons de plus que la liaison pivot du tabouret est parfaite.

On peut alors appliquer le TMC au système  $\{personne + si\grave{e}ge + halt\grave{e}res\}$  dans le référentiel terrestre que l'on suppose galiléen. Les forces (extérieures) qui s'appliquent au système sont le poids et la liaison entre le siège et les pieds du tabouret. Les moments exercés par ces deux forces autour de l'axe de rotation sont nuls (poids parallèle à l'axe de rotation et liaison pivot parfaite), donc le moment cinétique est une constante au cours du mouvement.

Ceci signifie que tant que la personne assise garde ses bras tendus, son moment cinétique est constant et égal à  $L_1 = J_1\omega_1$  mais comme son moment d'inertie  $J_1$  est constant, alors sa vitesse de rotation  $\omega_1$  l'est aussi.

Si maintenant la personne plie ses bras pour les rapprocher les haltères du torse, alors la répartition des masses autour de l'axe de rotation change, donc le moment d'inertie devient  $J_2 < J_1$ , et la vitesse de rotation  $\omega_2$  telle que  $L_2 = J_2\omega_2 = L_1$  par conservation du moment cinétique. On trouve donc  $\omega_2 = \frac{J_1}{J_2}\omega_1$  : la vitesse de rotation augmente bien comme observé expérimentalement.

Calculons la variation d'énergie cinétique entre les deux instants :  $E_{c1} = J_1\omega_1^2$ ,  $E_{c2} = J_2\omega_2^2 = J_1\omega_1\omega_2$ . On observe donc que  $\Delta E_c = \frac{1}{2}J_1\omega_1(\omega_2 - \omega_1) \neq 0$ , alors qu'aucune force extérieure ne travaille.

Ce problème apparent est levé en se rendant compte qu'il est primordial de prendre en compte les forces intérieures lors de l'étude d'un système déformable.

On peut même observer que  $\Delta E_c > 0$ , ce qui signifie que lors du pliage des bras, le système a produit un travail : la personne a dû "travailler" contre la rotation pour plier ses bras, alors que dans le cas où elle aurait souhaité faire l'expérience inverse, ses bras se seraient écartés "tout seuls", sans "travailler".

### 5.3.2 Cas général

On considère dans cette partie un système matériel *déformable*, c'est-à-dire composée de points matériels dont les distances entre eux peuvent changer, contrairement au cas des solides indéformables.

On peut alors faire une étude énergétique du système, en considérant que l'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques des  $N$  points matériels :  $E_c = \sum_{i=1}^N E_{c,i}$ .

On peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique à chacun des points matériels, en prenant en compte la résultante des forces extérieures au système qu'il subit  $\vec{F}_{ext,i}$  et les forces qu'exercent chacun des autres points matériels  $\vec{F}_{j \rightarrow i}$ .

On obtient pour chaque point matériel  $i$  de vitesse  $\vec{v}_i$  dans le référentiel d'étude supposé galiléen la puissance cinétique :

$$\frac{dE_{c,i}}{dt} = \left( \vec{F}_{ext,i} + \sum_{j \neq i} \text{vec} F_{j \rightarrow i} \right) \cdot \vec{v}_i \quad ;$$

d'où l'on déduit la puissance cinétique du système :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \left( \vec{F}_{ext,i} + \sum_{j \neq i} \text{vec} F_{j \rightarrow i} \right) \cdot \vec{v}_i \quad .$$

On peut donc faire la distinction entre le terme dû à la puissance des forces extérieures, et celui dû à la puissance des forces internes au système (le terme avec la double somme).

### 5.3.3 Puissance des forces intérieures

La plupart du temps, la puissance des forces intérieures est non nulle. On peut par exemple imaginer un élastique tendu, lâché sans vitesse initiale dans l'espace (donc on néglige les forces extérieures). Lorsque l'élastique est relâché, il va se contracter, et donc certaines parties vont avoir une vitesse non-nulle : l'énergie cinétique totale de l'élastique est alors non constante, bien que la puissance des forces extérieures soit nulle.

En pratique, il est très compliqué de déterminer la puissance des forces intérieures dans le cas général (si il y a  $N$  points matériels, il y a  $N^2$  interactions entre eux, ce qui devient vite très chronophage). Toutefois, elle est simple à calculer dans le cas des solides indéformables.

En effet, si l'on considère seulement un couple de deux points matériels noté 1 et 2, alors la puissance des forces intérieures est  $P_{int} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{v}_1 + \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_2$ .

On peut alors utiliser la loi des actions réciproques  $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$  et la loi de composition des vitesses  $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \overrightarrow{A_2 A_1} \wedge \vec{\omega}$  et on obtient  $P_{int} = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \cdot (\overrightarrow{A_2 A_1} \wedge \vec{\omega})$ , or pour deux points matériels, la force qui s'exerce entre eux est dirigée par le vecteur  $\overrightarrow{A_2 A_1}$ , donc la force est le long de ce vecteur alors que le terme en produit vectoriel lui est orthogonal. Le produit scalaire est donc nul et la puissance aussi. On généralise ce résultat pour chaque couple de points matériels et on obtient :

La puissance des forces intérieures d'un solide indéformable est nulle.