

MÉCANIQUE 2

MÉCANIQUE NEWTONIENNE.

Table des matières

1	Principes de la mécanique newtonienne	2
1.1	Interactions fondamentales	2
1.2	Notion de force et loi des actions réciproques	2
1.2.1	Forces	2
1.2.2	Forces usuelles	3
1.2.3	Loi des actions réciproque (3ème loi de Newton)	3
1.2.4	Bilan des forces	3
1.3	Première loi de Newton et référentiel galiléen	4
1.3.1	Système isolé ou pseudo-isolé	4
1.3.2	Loi de l'inertie (1ère loi de Newton)	4
1.3.3	Référentiels galiléens	4
1.4	Loi de la quantité de mouvement (2ème loi de Newton)	4
1.4.1	Quantité de mouvement et centre de masse	4
1.4.2	Loi de la quantité de mouvement	5
2	Applications	5
2.1	Décollage de Falcon Heavy	5
2.2	Lancer franc au basket-ball et lob au badminton	6
2.2.1	Etude du lancer franc	6
2.2.2	Volant de badminton	8
2.3	Glissement d'un pavé le long d'un plan incliné	9
2.4	Tirant d'eau d'un navire	10
2.5	Pendule simple	10
2.6	Mouvement dans un champ de gravitation	11

Nous venons de terminer le chapitre de cinématique, la partie de la mécanique qui s'intéresse à la description des mouvements. Nous allons maintenant tâcher d'expliquer l'origine de ces mouvements, en introduisant la notion de forces introduit par Newton : il s'agit de la dynamique. Dans ce chapitre, nous nous restreindrons à une étude dans la cadre de ce qui s'appelle la mécanique newtonienne (on ne prend pas en compte les avancées d'Einstein développées par la théorie de la relativité).

1 Principes de la mécanique newtonienne

1.1 Interactions fondamentales

Pour changer la vitesse (en norme ou en direction) d'un système A , un autre système B doit exercer sur lui une action (par exemple, la Terre qui attire les objets massifs, l'impact d'une boule de billard sur une boule immobile, ...). Toutefois, la troisième loi de Newton que nous verrons plus tard nous dit que dans ce cas, le système A exerce aussi une action sur B (de même amplitude et de sens opposé) : on parle d'**interaction**.

Il y a quantité d'interactions possibles (poids, frottements, champ électrique, champ magnétique, réaction d'un support, collision, etc) mais elles sont toutes une forme d'une des quatre **interactions fondamentales** :

- l'interaction gravitationnelle, de portée infinie et qui s'exerce entre systèmes massifs ;
- l'interaction électromagnétique, de portée infinie et qui s'exerce entre systèmes chargés électriquement ;
- l'interaction faible, de portée limitée au noyau atomique, responsable de la radioactivité ;
- l'interaction nucléaire forte, de portée limitée au noyau, responsable de la cohésion du noyau.

A notre échelle, les deux seules interactions qui produisent des effets sont la gravitation et l'électromagnétisme : deux objets qui entrent en collision se "repoussent" à cause des nuages électroniques des atomes de la surface qui sont chargés négativement et se repoussent. Les interactions moléculaires sont aussi dues à l'électromagnétisme, les forces de ressort dues à la cohésion des métaux due au cortège électronique, pareil pour les forces de frottements, etc

Modèle standard (hors programme)

Dans le cadre de la théorie quantique des champs, trois des quatre interactions fondamentales sont dues à l'échange de bosons "virtuels" entre les systèmes considérés : les gluons pour l'interaction forte, les bosons W^\pm ou Z^0 pour l'interaction faible et le photon pour l'interaction électromagnétique.

D'après le modèle standard, tous ces bosons sont identiques à très haute température, c'est la théorie de l'unification des forces (comme l'électricité et le magnétisme ont été unifiés par Maxwell) et des brisures de symétrie que l'on appelle modèle standard. Pour l'instant, on a réussi à montrer en accélérateur de particules l'existence de l'interaction électrofaible.

Le boson de Higgs quant à lui est le boson qui serait responsable de la différence de masse entre les bosons médiateurs des interactions, ce qui explique la différence de portée et de magnitude de chaque interaction.

Il est donc tentant de développer aussi une théorie quantique de la gravitation (théorie des cordes ou gravitation quantique à boucles), avec un hypothétique boson, le graviton, qui serait responsable de l'interaction entre objets massifs.

1.2 Notion de force et loi des actions réciproques

1.2.1 Forces

Comme on vient de le voir, les interactions fondamentales sont des interactions entre particules élémentaires, ainsi décrire les interactions entre deux systèmes massifs qui peuvent en contenir un très grand nombre (pour rappel $\mathcal{N}_A = 6,022 \cdot 10^{23}$) risque d'être compliqué. On modélise donc ces interactions grâce à la notion de **force** (de la même manière que l'on a modélisé une transformation chimique par une réaction chimique par exemple).

L'effet d'une force sur un système est de changer le mouvement du système, soit en changeant la norme de sa vitesse, soit sa direction. Une force peut donc être caractérisée par une direction, un sens et une amplitude : on lui associe donc un **vecteur**. L'amplitude d'une force se mesure en **newton**, N.

1.2.2 Forces usuelles

- la force d'attraction gravitationnelle : un objet A de masse m_A exerce sur un objet B de masse m_B situé à une distance r une force d'amplitude $F = G \frac{m_A m_B}{r^2}$ où G est la constante de gravitation universelle ($G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$). La direction de la force est la droite AB , et le sens est de B vers A ;
- le poids : c'est la force due à l'attraction gravitationnelle de la Terre (ou d'un autre astre) sur un objet situé à son voisinage. Par exemple, un objet de masse m situé sur Terre subit de la part de celle-ci une force $\vec{P} = m\vec{g}$, où $\vec{g} = g\vec{u}$ avec $g = G \frac{m_T}{r_T^2} \simeq 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ est l'accélération de la pesanteur terrestre, et le vecteur \vec{u} est le vecteur unitaire dirigé vers le centre de la Terre ;
- les forces de pression : un système plongé dans un gaz subit constamment des collisions avec les molécules ou les atomes composant le gaz. Ces collisions exercent une force perpendiculaire à la surface du système, dirigé vers le côté à l'opposé du gaz et d'intensité proportionnelle à la surface du système. La constante de proportionnalité s'appelle la pression ;
- la poussée d'Archimède : plongé dans un fluide et dans un champ de pesanteur, le système subit de la part du fluide une force opposé au poids et d'intensité égale au poids du volume de fluide qu'il occupe (due à la différence de pression avec l'altitude) ;
- les forces de frottement qui peuvent être de deux types :
 - entre deux solides, les forces de frottement sont des forces de frottement solide : l'action de contact exercée par le solide A sur le solide B est décomposée en une force perpendiculaire à la surface de contact N (pour normale) et une composante parallèle à la surface T (pour tangentielle). En cas de glissement, on a $T = f_d N$ avec f_d le coefficient de frottement dynamique, et \vec{T} est dirigé à l'opposé de la vitesse. S'il n'y a pas de glissement, $T \leq f_s N$ avec f_s le coefficient de frottement statique ($f_s > f_d$).
 - pour un système qui se déplace dans un fluide avec une vitesse \vec{v} , la force de frottement est dirigé à l'opposé de \vec{v} , et bien que la formule donnant son intensité en fonction de la vitesse on a les deux cas limites possibles $\vec{F} = -\eta\vec{v}$ ou $F = \alpha v^2$ selon la viscosité du fluide.
- force de rappel d'un ressort : elle est dirigée selon la direction du ressort et proportionnelle à la différence entre la longueur du ressort et sa longueur à vide. La constante de proportionnalité est la constante de raideur du ressort ;
- la tension d'un fil : elle est dirigée le long du fil et est constante tout le long du fil.

1.2.3 Loi des actions réciproque (3ème loi de Newton)

Si un système ponctuel A exerce une action $\vec{F}_{A \rightarrow B}$ sur le système ponctuel B , alors le système B exerce une action sur A (interaction) égale et opposée : $\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\vec{F}_{A \rightarrow B}$ et les deux forces sont dirigées le long de la droite AB .

Ainsi, si la Terre exerce sur moi une action gravitationnelle de l'ordre de 700 N, j'exerce aussi sur la Terre une action de 700 N (on peut le voir sur la formule de l'attraction gravitationnelle de Newton). La raison pour laquelle l'action que j'exerce n'a pas la même influence sur la Terre que le poids a d'influence a pour moi sera plus claire lorsque nous aurons abordé la deuxième loi de Newton, mais on peut avoir une idée en se rendant compte que la force à exercer pour changer le mouvement d'une planète doit être immensément plus grande que pour changer les miens.

1.2.4 Bilan des forces

Lors de l'étude d'un système il est nécessaire de procéder à un bilan des forces afin d'être sûr de ne pas en oublier. Un objet pratique pour ceci est un diagramme objet-interactions où l'on liste les différents objets avec lesquels le système est en interaction et le type de ces interactions. En règle générale, on prend en compte d'abord les interactions à distance (gravitation ou électromagnétisme) puis toutes les actions de contact (donc prendre en compte tous les objets en contact avec le système).

Une fois que la liste des interactions est établie, on représente sur un schéma chacune des forces correspondantes par un vecteur donnant la direction, le sens et l'intensité de la force, et l'on précise aussi le point d'application de la force en faisant partir le vecteur de ce point.

Exemple : craie posée sur le bureau

1.3 Première loi de Newton et référentiel galiléen

1.3.1 Système isolé ou pseudo-isolé

On vient de voir l'existence de deux interactions fondamentales de portée infinie dont la gravitation, ainsi un système massif ne peut jamais être sans interaction : un système **isolé** ne peut exister.

On parle donc de système **pseudo-isolé** dès que la somme des forces qu'il subit s'annule.

1.3.2 Loi de l'inertie (1ère loi de Newton)

La loi de l'inertie, aussi appelée première loi de Newton, stipule qu'un système ponctuel isolé ou pseudo isolé a un mouvement de translation rectiligne uniforme.

Ceci signifie que son vecteur vitesse est constant, tant en norme qu'en direction.

1.3.3 Référentiels galiléens

La loi de l'inertie stipule qu'un système pseudo isolé a un mouvement de translation rectiligne uniforme. Imaginons alors un parachutiste lorsque la voile exerce une force égale au poids : il descend alors vers le sol avec une vitesse constante. Toutefois, si l'observateur est en chute libre à côté du parachutiste, il va le voir s'éloigner de lui de plus en plus vite donc avec un mouvement accéléré : on a déjà vu en cinématique qu'il est nécessaire de préciser le référentiel lors de l'étude d'un mouvement.

La loi de l'inertie permet de définir une classe de référentiels appelés référentiels **galiléen**.

Définition

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel la loi de l'inertie est vérifiée, c'est-à-dire un référentiel dans lequel un système ponctuel isolé ou pseudo-isolé a un mouvement de translation rectiligne uniforme.

Avec cette définition, on voit que si \mathcal{R}_1 est un référentiel galiléen et que \mathcal{R}_2 est un référentiel qui est en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R}_1 , alors \mathcal{R}_2 est un référentiel galiléen (on parle en mathématiques de classe d'équivalence).

Problème : comment trouver le "premier" référentiel galiléen ?

On définit le **référentiel de Copernic** avec le centre de masse du système solaire et trois étoiles lointaines considérées comme fixes, et on postule que ce référentiel est galiléen. Il est bien adapté à l'étude des mouvements des astres dans le système solaire.

On peut alors aussi considérer le **référentiel géocentrique**, qui a pour origine le centre de la Terre et les mêmes axes que le référentiel de Copernic. Sur des durées courtes devant une année, on peut considérer que le mouvement de rotation de la Terre autour du Soleil est approximativement une translation rectiligne uniforme et donc considérer le référentiel géocentrique comme galiléen. Il est bien adapté à l'étude des satellites terrestres, ou des forces de marée par exemple.

Sur des durées courtes devant un jour, on peut considérer le **référentiel terrestre**, dans lequel le sol est immobile (on parle aussi du référentiel du laboratoire). On considère alors que la rotation de la Terre sur elle-même peut être approximé par une translation rectiligne uniforme, et le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen.

1.4 Loi de la quantité de mouvement (2ème loi de Newton)

1.4.1 Quantité de mouvement et centre de masse

Imaginons deux systèmes de masses différentes se déplaçant à la même vitesse \vec{v} dans un référentiel galiléen, et que l'on applique la même force à ces deux systèmes. Par exemple, un rugbyman essayant d'en plaquer deux autres, l'un de 50 kilogrammes, l'autre de 120 kilogrammes.

Intuitivement, on comprend bien que la différence de mouvement apportée dans chaque cas sera différente, et que le système le plus léger verra sa vitesse changer de manière plus significative.

La quantité importante pour déterminer l'effet d'une force est la **quantité de mouvement**.

Définition

La **quantité de mouvement** d'un système ponctuel de masse m et de vitesse \vec{v} dans un référentiel galiléen est :

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Comme la vitesse, la quantité de mouvement dépend du référentiel.

La quantité de mouvement est une grandeur additive : si le système est composé de deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 , la quantité de mouvement totale est :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \frac{d(m_1\vec{OM}_1 + m_2\vec{OM}_2)}{dt}$$

Définition

On définit le **centre de masse** (ou **barycentre**) G de deux points matériels M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2 par :

$$\vec{OG} = \frac{m_1\vec{OM}_1 + m_2\vec{OM}_2}{m_1 + m_2}.$$

Cette définition se généralise au cas de n points matériels :

$$\vec{OG} = \frac{\sum_n m_n \vec{OM}_n}{\sum_n m_n}.$$

Définition

La quantité de mouvement d'un système de n points matériels ou d'un solide de masse totale m et dont le centre de masse G est animé d'une vitesse \vec{v}_G dans le référentiel galiléen \mathcal{R} est $\vec{p} = m\vec{v}_G$.

1.4.2 Loi de la quantité de mouvement

Si on considère un système massif de quantité de mouvement \vec{p} dans un référentiel galiléen soumis à des forces \vec{F}_i de résultante \vec{F}_{ext} alors :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Cas particulier : pour un système de masse m constante alors la loi de la quantité de mouvement s'écrit $\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}_{ext}$.

Cas particulier 2 : pour un système isolé ou pseudo-isolé, on retrouve bien la loi de l'inertie.

Cas particulier 3 : un système au repos (donc $\vec{p} = \vec{0}$ et sa dérivée aussi) subit des forces qui se compensent $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$

Il est nécessaire que le référentiel soit galiléen pour avoir l'égalité entre dérivée de la quantité de mouvement et forces extérieures appliquées. Dans le cas de référentiels non-galiléens, il est nécessaire de prendre en compte des "forces" inertielles prenant en compte le caractère non-galiléen du référentiel.

Par exemple, un ballon attaché à une corde sur un manège en rotation uniforme pour lequel trois forces extérieures s'exercent : le poids, la réaction du manège (égale et opposée au poids) et la tension du fil. Ainsi, la somme des forces extérieures est non nulle et égale à la seule force de tension du fil : le mouvement n'est pas rectiligne uniforme dans le référentiel du sol que l'on peut considérer galiléen le temps de cette expérience. Toutefois, dans le référentiel du manège, le ballon est immobile, donc on est tenté d'introduire une "force" inertielle correspondant à l'accélération du repère par rapport au référentiel galiléen (on entend parler souvent de force centrifuge).

2 Applications

2.1 Décollage de Falcon Heavy

Lors du chapitre de cinématique, nous avons étudié le décollage de Falcon Heavy. Cette fusée a une masse au décollage $m = 1400$ tonne et le moteur exerce une poussée en éjectant les gaz de combustion d'intensité $F_p = D_m v_e$ où v_e est la vitesse d'éjection des gaz ($v_e = 4,0$ km/s) et D_m le débit massique de gaz (la masse de carburant brûlés par unité de temps). Sachant que l'accélération déterminée lors de l'étude cinématique était de 14 m.s^{-2} quel est le débit massique de gaz ?

- Système : fusée
- Référentiel : terrestre. Galiléen dans cette expérience.
- Système de coordonnées : cartésien, on prendra l'origine au point de lancement, et l'axe z vertical dirigé vers le haut.

- Forces extérieures : poids, poussée des gaz. On va négliger les effets de l’atmosphère.
- Résolution : Appliquons la loi de la quantité de mouvement au départ de la fusée : on a $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$. On projette cette équation le long de l’axe z , et en considérant la masse comme constante on a l’égalité : $ma = -mg + F_p$ donc $F_p = ma + mg$, donc une force de poussée d’intensité $F_p = 34$ MN.

On déduit ensuite le débit massique de carburant : $D_m = \frac{F_p}{v_e} = 8,4 \cdot 10^3$ kg/s.

- Discussion du résultat : la poussée nominale de Falcon Heavy est de 22 000 kN. Comment expliquer cette différence ? En fait, la masse de la fusée n’est pas constante puisqu’elle éjecte les gaz de combustion des carburants, donc même avec une poussée plus faible constante, l’accélération de la fusée est de plus en plus grande.

Les 2 propulseurs d’appoint emportent chacun 411 tonnes de carburant et tout ce carburant est brûlé en 150 s, donc un débit massique de $5,5 \cdot 10^3$ kg/s : on trouve bien le bon ordre de grandeur.

Rappel sur le poids : Le poids dépend de l’altitude puisque la distance au centre de la Terre change. Toutefois, en posant $g(z) = G \frac{m_T}{(R+z)^2}$ l’accélération de la pesanteur à l’altitude z , on peut comparer l’accélération de la pesanteur au sol et à l’altitude de 100 km : $\frac{\Delta g}{g} = R^2 \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+z)^2} \right) \simeq \frac{2z}{R} \simeq 3\%$, ce qui justifie que l’on peut négliger cette variation comme nous l’avons fait.

2.2 Lancer franc au basket-ball et lob au badminton

Nous allons maintenant étudier le mouvement de deux systèmes matériels en lien avec le sport : un lancer de ballon de basket et le mouvement d’un volant de badminton.

Les relevés des positions de chaque système en fonction du temps sont donnés dans la figure ci-dessous.

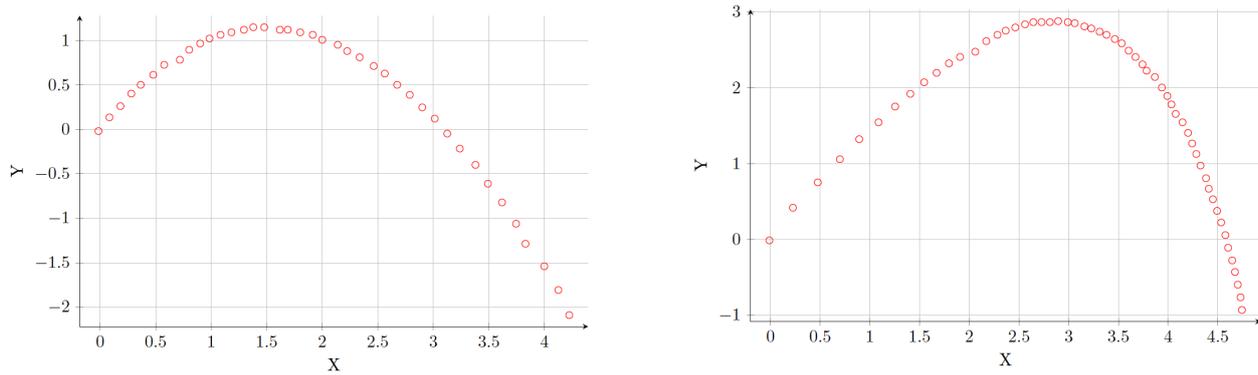


FIGURE 1 – Trajectoires des lancers de ballon de basket (à gauche) et de volant de badminton (à droite)

2.2.1 Etude du lancer franc

- Système : ballon
- Référentiel : terrestre, galiléen pour cette étude.
- Système de coordonnées : cartésien (2 directions privilégiées). Origine : au sol, à l’endroit du lancer. Axe x dans la direction et le sens du lancer, axe y vertical vers le haut.
- Bilan des forces :
 1. A distance : le poids
 2. De contact : pression de l’air
 3. De contact : poussée d’Archimède
 4. De contact : frottements de l’air

Estimons les forces et direction de chacune de ces forces.

Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$.

La pression de l’air : l’intégrale de cette force s’annule.

La poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = m_a g \vec{u}_y$, or $m_a \simeq 1 \text{ g}$ et $m \simeq 600 \text{ g}$. On va donc négliger la poussée d'Archimède devant le poids du ballon.

Les frottements de l'air : négligés dans cette étude.

Conclusion : dans cette étude, nous allons donc ne considérer que l'effet du poids.

• Détermination des **équations horaires du mouvement** :

On peut alors utiliser la loi de la quantité de mouvement, et écrire pour le centre de gravité du ballon $\frac{dm\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = m\vec{g}$. On projette ensuite cette équation le long des axes x , y et z :

$$m\ddot{x} = 0 \quad m\ddot{y} = -mg \quad m\ddot{z} = 0.$$

On intègre ensuite ces trois relations :

$$\dot{x}(t) = v_x(t) = v_{x,0} \quad \dot{y}(t) = v_y(t) = -gt + v_{y,0} \quad \dot{z}(t) = v_z(t) = v_{z,0} = 0.$$

On s'aperçoit donc que selon ce modèle, la vitesse selon l'axe x doit être constante et celle selon y doit suivre une loi affine. On peut le vérifier en calculant la vitesse du centre de gravité à chaque instant, et on obtient le graphe suivant, qui corrobore cette modélisation.

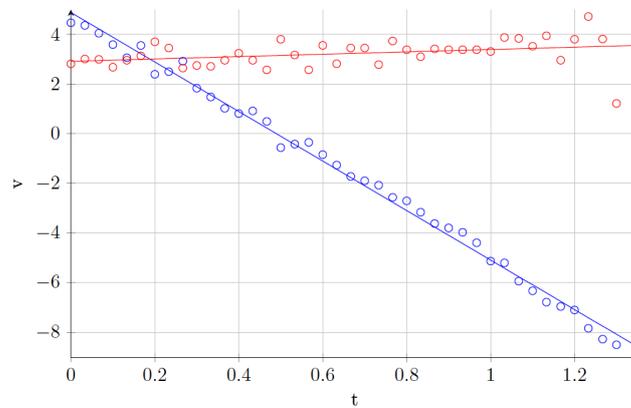


FIGURE 2 – Courbes des vitesses horizontale (en rouge) et verticale (en bleu) et régressions linéaires pour le ballon de basket

Les régressions linéaires coïncident bien avec une pente pour la vitesse verticale de $-9,97 \text{ m.s}^{-2}$ (incertitude-type de $0,27 \text{ m.s}^{-2}$), compatible avec la valeur de $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. La courbe pour la vitesse horizontale est bien modélisée par une vitesse constante (pente de $0,48 \pm 0,45 \text{ m.s}^{-2}$).

On peut intégrer à nouveau ces équations pour obtenir les **équations horaires du mouvement** :

$$x(t) = v_{x,0}t + x_0 \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0,y}t + y_0 \quad z(t) = z_0 = 0.$$

Définition

Les **équations horaires du mouvement** sont les équations qui donnent les composantes du vecteur-position en fonction du temps.

• Détermination de l'équation de la trajectoire :

Définition

L'**équation de la trajectoire** d'un point est l'équation reliant les différentes composantes du vecteur-position, sans faire intervenir le temps.

Ici, on remplace dans l'équation horaire du mouvement selon y le paramètre temps t par la formule obtenue grâce à la première équation horaire : $t = \frac{x(t)-x_0}{v_{x,0}}$. On obtient alors l'équation :

$$y = \frac{-g}{2v_{x,0}^2}(x - x_0)^2 + \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}}(x - x_0) + y_0 = \frac{-g}{2v_{x,0}^2}x^2 + \left(\frac{v_{y,0}}{v_{x,0}} + \frac{gx_0}{v_{x,0}^2}\right)x + y_0 - \frac{g}{2v_{x,0}^2}x_0^2 - \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}}x_0,$$

qui est l'équation cartésienne d'une parabole.

2.2.2 Volant de badminton

Adoptons les résultats précédents avec le volant de badminton : si le poids est la seule force à considérer, on devrait aussi obtenir une parabole pour trajectoire, et les vitesses devraient être constante selon x et affine selon y .

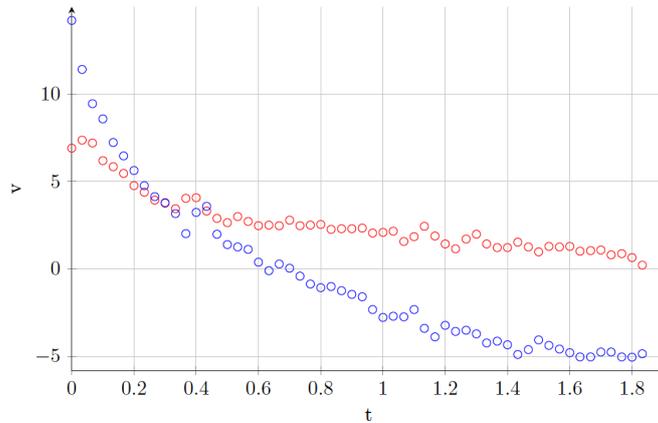


FIGURE 3 – Vitesses mesurées du volant de badminton (horizontale en rouge, verticale en bleu).

Nous voyons sur la figure 3 que ce n'est pas le cas : ceci indique qu'il y a des interactions que nous n'avons pas pris en compte. L'argument sur la pression de l'air et sur la poussée d'Archimède sont toujours valable, par contre les frottements ne sont pas du tout négligeables.

Il y a deux formules différentes que l'on peut utiliser pour modéliser les frottements fluides subis par un système se déplaçant à la vitesse \vec{v} par rapport à un gaz ou un liquide :

1. la première est bien adaptée aux écoulements laminaires (faible vitesse, fluide visqueux), alors la force est proportionnelle à la vitesse $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$, on parle de frottements linéaires ;
2. la seconde est bien adaptée aux écoulements turbulents (grande vitesse, faible viscosité), et la force est proportionnelle au carré de la vitesse $\vec{F} = -\beta||\vec{v}||\vec{v} = -\beta v^2 \frac{\vec{v}}{v}$. On parle alors de frottements quadratiques.

On effectue alors la résolution des deux équations différentielles vectorielles $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \alpha\vec{v}$ ou $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \beta v\vec{v}$. Ces deux équations se simplifient en $\frac{dv_x}{dt} = -\alpha_2 v_x$ et $\frac{dv_y}{dt} = -g - \beta_2 v_y$ (en posant $\alpha_2 = \alpha/m$ et $\beta_2 = \beta/m$).

Dans les deux cas, on peut relier les valeurs de α_2 et β_2 à la vitesse limite atteinte en régime permanent puisque on a alors soit $\alpha_2 v_{lim} = g$ ou $\beta_2 v_{lim}^2 = g$. On mesure donc la vitesse limite du volant de badminton, ici $v_{lim} = 6,2 \text{ m/s}$ et on résout numériquement les deux équations différentielles afin de trouver le modèle qui permet de se rapprocher au mieux des données expérimentales. Les résultats sont montrés sur la figure 4. On peut aussi intégrer une fois de plus les vitesses obtenues pour avoir les positions et visualiser les trajectoires théoriques pour chaque modèle.

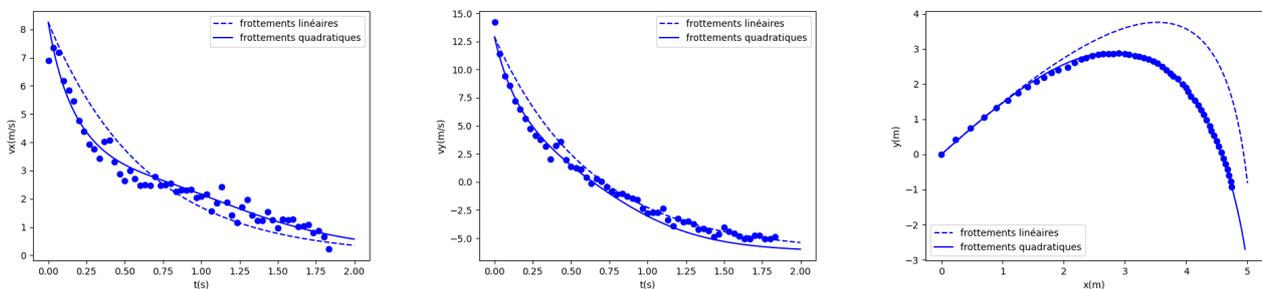


FIGURE 4 – Comparaison des deux modèles aux vitesses (horizontale à gauche, verticale au milieu) et à la trajectoire (à droite) mesurées pour le volant de badminton.

On s'aperçoit donc que le modèle qui décrit le mieux les frottements fluides dans cette situation est le modèle des frottements fluides dans le régime turbulent, avec une force quadratique en la vitesse. Il existe en réalité un nombre que l'on peut calculer, le **nombre de Reynolds**, qui nous permet de savoir quelle formule choisir pour modéliser les frottements fluides. On calcule ce nombre sans dimension par la formule $Re = \frac{\rho L v}{\eta}$ où ρ est la masse volumique du fluide, L une taille caractéristique du système, v la vitesse et η la viscosité du fluide. On distingue alors les deux cas :

- Si $Re < 1$, alors on est dans le régime laminaire, et $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$;
- si $Re > 10^3$, alors on est dans le régime turbulent et $\vec{F} = -\beta v\vec{v}$.

Dans le cas du volant de badminton, $Re = \frac{1\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}\cdot 0,1\text{ m}\cdot 1\text{ m/s}}{1\cdot 10^{-5}\text{ Pa}\cdot\text{s}} \sim 10^4$, donc on est bien dans le régime turbulent, comme trouvé par la modélisation numérique.

2.3 Glissement d'un pavé le long d'un plan incliné

On va maintenant essayer de déterminer pourquoi un pavé posé sur un plan faiblement incliné reste immobile, et se met à se déplacer lorsque l'on incline le plan.

- Système : pavé
- Référentiel : terrestre, galiléen pour cette étude.
- Système de coordonnées : cartésien (2 directions privilégiées). Origine : au pavé (peu important de toute façon). Axe x dans le sens du plan incliné, dirigé vers le bas, axe y perpendiculaire vers le haut.
- Bilan des forces :
 1. A distance : le poids
 2. De contact : le plan incliné
 3. De contact : frottements de l'air : négligeables

Il nous faut donc maintenant préciser chacune de ces deux forces dans le repère choisi. Si on appelle α l'angle que forme le plan incliné avec l'horizontale, on a :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= mg(\sin\alpha\vec{u}_x - \cos\alpha\vec{u}_y) && \text{pour le poids} \\ \vec{F} &= -T\vec{u}_x + N\vec{u}_y && \text{pour la réaction du support} \end{aligned}$$

A quelle condition sur α le solide reste-t-il immobile?
Appliquons la loi de l'inertie au solide immobile :

$$m\vec{a} = \vec{0} = \vec{P} + \vec{F}$$

Si on projette sur chaque axe on doit donc avoir les deux conditions :

$$T = mg \sin \alpha \quad N = mg \cos \alpha$$

Or en l'absence de glissement, on sait que les frottements solides sont tels que $T \leq fN$, on doit donc avoir $\tan \alpha \leq f$.
Que se passe-t-il lorsque $\tan \alpha > f = \tan \alpha_0$?

On vient de voir que le pavé ne pouvait pas rester immobile, il y aura donc glissement du pavé le long du plan incliné. Le bilan de forces précédent est toujours valable et l'on a donc $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$. On va maintenant projeter cette équation sur les deux axes x et y :

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - T \quad m\ddot{y} = N - mg \cos \alpha.$$

On va maintenant simplifier ces équations en remarquant que le mouvement du pavé ne peut se faire que le long de l'axe x , donc $\dot{y} = 0$ et partant $\ddot{y} = 0$.

On a donc toujours $N = mg \cos \alpha$, et puisqu'il y a glissement $T = fN = fmg \cos \alpha$.

On déduit donc $m\ddot{x} = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) = mg \sin \alpha (1 - \frac{\tan \alpha_0}{\tan \alpha}) > 0$.

On intègre deux fois avec les conditions initiales $\dot{x}(t=0) = 0$ et $x(0) = 0$ et on obtient l'équation horaire du mouvement $x(t) = \frac{1}{2}g \sin \alpha (1 - \frac{\tan \alpha_0}{\tan \alpha}) t^2$.

C'est par exemple ce qui se passe pour un skieur de kilomètre lancé, jusqu'à ce que les frottements de l'air ne soient plus négligeables et qu'ils compensent exactement cette accélération.

Par exemple, en utilisant une force de frottements fluides du type $\vec{f} = -\beta v\vec{v}$ (régime turbulent, fluide peu visqueux et vitesse élevée), on va trouver en projetant la loi de la quantité de mouvement sur x :

$$m\ddot{x} = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) - \beta\dot{x}^2 = 0$$

donc une vitesse limite $v = \sqrt{\frac{mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)}{\beta}}$.

2.4 Tirant d'eau d'un navire

Considérons un superpétrolier de forme que l'on approximera par un pavé de longueur 400 m et de largeur 60 m et de masse à vide 70 000 tonnes. Le tirant d'eau est la hauteur de la partie immergée du bateau.

Quel est le tirant d'eau du bateau à vide ?

Le navire chargé de brut a alors un tirant d'eau de 30 m, quelle est la masse de brut chargée ?

- Système : bateau
- Référentiel : terrestre, galiléen pour cette étude.
- Système de coordonnées : cartésien. Origine : au bateau. Axe z perpendiculaire vers le haut.
- Bilan des forces :
 1. A distance : le poids
 2. De contact : la poussée d'Archimède

Précisons alors l'expression de deux forces :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= -m_{bat}g\vec{u}_z && \text{pour le poids} \\ \vec{F} &= \rho_{eau}Llhg\vec{u}_z && \text{pour la poussée d'Archimède} \end{aligned}$$

Puisque le bateau reste à la surface de l'eau, $\vec{z} = cte$ donc $\dot{z} = 0$ et $\vec{a} = \vec{0}$.

On applique alors la loi de la quantité de mouvement et on trouve :

$$\rho_{eau}Llhg = m_{bat}g$$

On peut donc déterminer le tirant d'eau lège (sans charge) $h = \frac{m_{bat}}{\rho_{eau}Ll} = 3,2$ m. La masse du bateau chargé est $m' = \rho_{eau}Llh = 720000$ tonnes, donc une masse de brut chargée de 650 000 tonnes.

La bateau que nous avons considéré ici est un bateau de dimensions similaires au plus grand bateau jamais construit, le *Batillus*, dont la hauteur maximale était d'environ 70 m. On imagine bien qu'un tel bateau, avec un tirant d'eau de seulement 3 mètres se retournerait assez facilement : c'est pourquoi les bateaux emplissent des ballast d'eau de mer lorsqu'ils sont à vide, afin d'augmenter le tirant d'eau et d'être plus stables.

2.5 Pendule simple

Une des premières méthodes de mesures mécaniques du temps est l'horloge, où un balancier effectue un mouvement de va et vient et chaque oscillation sert à incrémenter le mouvement d'une aiguille.

Pour modéliser une telle horloge, nous allons considérer que le balancier est dans un premier temps comparable à un pendule simple, c'est-à-dire qu'il est constitué d'une masse m reliée par un fil inextensible de longueur L et de masse nulle à un point fixe.

On cherche alors à savoir quelle doit être la longueur du fil L pour que la période du pendule soit de 2 secondes.

- Système : masse
- Référentiel : terrestre, galiléen pour cette étude.
- Système de coordonnées : cylindrique. Origine : au pivot. Axe z perpendiculaire au mouvement, origine des angles à la verticale.
- Bilan des forces :
 1. A distance : le poids
 2. De contact : la tension du fil

Exprimons alors chacune de ces forces dans le système de coordonnées choisies :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= mg(\cos\theta\vec{u}_r - \sin\theta\vec{u}_\theta) && \text{pour le poids} \\ \vec{F} &= -T\vec{u}_r && \text{pour la tension du fil} \end{aligned}$$

Exprimons maintenant l'accélération :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z = -L\dot{\theta}^2\vec{u}_r + L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta.$$

On peut donc projeter le PFD le long des deux vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_θ et obtient :

$$\begin{aligned} -mL\dot{\theta}^2 &= mg \cos \theta - T \\ mL\ddot{\theta} &= -mg \sin \theta \end{aligned}$$

La première équation n'est pas utilisable pour l'étude cinématique : on ne connaît pas la valeur de la tension du fil, qui par ailleurs varie en fonction du temps. En fait, c'est même l'inverse qui est fait habituellement : on se sert de cette équation pour trouver la tension du fil.

Par contre la deuxième équation est une équation différentielle qui caractérise le mouvement du pendule simple :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0.$$

L'inconvénient de cette équation différentielle est qu'elle n'est pas linéaire à cause de la présence du terme en $\sin \theta$. Pour pallier ce problème, on utilise alors la formule du *développement aux petits angles* : $\sin \theta \simeq \theta$.

On obtient alors l'équation différentielle approchée $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ qui est une équation d'oscillateur harmonique avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Si on écarte alors le pendule de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 à l'instant initial et qu'on le lâche sans vitesse initiale, l'équation horaire du mouvement est :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$$

On en déduit donc que la période du pendule est $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. Pour un pendule de période 2 secondes, il faut donc une longueur $L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 1,0$ m.

On remarque alors que la période du pendule ne dépend pas de la masse considérée (on peut s'en douter par analyse dimensionnelle), ni de l'angle initial θ_0 : on parle d'**isochronisme** des oscillations.

On peut alors vouloir tracer le portrait de phase, et donc calculer la vitesse angulaire :

$$\dot{\theta} = -\omega_0 \theta_0 \sin(\omega_0 t).$$

L'équation permettant de tracer le portrait de phase est alors $\theta^2 + \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 = \theta_0^2$: on a l'équation d'une ellipse.

On va voir dans le prochain chapitre l'aspect énergétique de la mécanique, mais on peut se rendre compte ici que cette constante (on parle d'**intégrale première du mouvement**) traduit la conservation de l'énergie mécanique : la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique est constante :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 \\ E_p &= mgz = mgL(1 - \cos \theta) \simeq \frac{1}{2}mgL\theta^2 \\ E_m &= E_c + E_p = \frac{1}{2}mgL \left[\theta^2 + \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

2.6 Mouvement dans un champ de gravitation

Considérons le mouvement de la Terre autour du Soleil, dans le référentiel héliocentrique, muni de coordonnées cylindriques. On considèrera que la Terre suit une orbite contenue dans un plan (c'est le cas), et circulaire (en première approximation).

- Système : Terre
- Référentiel : héliocentrique, galiléen pour cette étude.
- Système de coordonnées : cylindrique. Origine : au Soleil. Axe z perpendiculaire au plan de l'orbite, origine des angles quelconque.
- Bilan des forces :

1. A distance : la gravitation $\vec{F} = -G \frac{M_S M_T}{r^2} \vec{u}_r$

Exprimons l'accélération de la Terre : $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$.

Appliquons le PFD projeté le long de \vec{u}_r et on obtient $M_T r \dot{\theta}^2 = G \frac{M_S M_T}{r^2}$ qui se simplifie en :

$$\dot{\theta}^2 = G \frac{M_S}{r^3}$$

On s'aperçoit donc que pour une orbite circulaire ($r = cte$), la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante, on a donc affaire à un mouvement circulaire uniforme.

On peut alors calculer la période de révolution (le temps nécessaire pour que la Terre fasse un tour autour du Soleil) T qui est tel que $\dot{\theta}T = 2\pi$, et on trouve :

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_S}}$$

Ce raisonnement peut se généraliser très simplement pour n'importe quel cas où est étudiée la rotation d'un astre léger autour d'un astre lourd selon une orbite circulaire. On trouve alors la troisième loi de Kepler :

La troisième loi de Kepler énonce que pour un astre léger en rotation circulaire autour d'un astre lourd, le carré de la période de révolution T^2 est proportionnel au cube du rayon de l'orbite.

Les deux autres lois de Kepler sont plus générales (elles s'appliquent aussi aux orbites non-circulaires) : la première énonce que la trajectoire de l'astre léger est une conique (hyperbole, parabole ou ellipse), et la seconde, aussi connue sous le nom de loi des aires, énonce qu'en des durées égales, les aires balayées par le vecteur position sont égales (ce qui dans le cas d'une orbite circulaire implique mouvement uniforme).