Mécanique 1
Cinématique.

Table des matières

La mécanique est la branche de la physique qui a pour but d'étudier et de prédire les mouvements d'objets. Il y a donc deux aspects distincts que nous allons devoir développer, le premier étant de *décrire le mouvement du système*, sans se préoccuper des causes de ce mouvement, il s'agit de la **cinématique** (du grec *kinema* mouvement). C'est l'objet du présent chapitre. Nous verrons dans un deuxième temps les causes de ce mouvement, en introduisant la notion de forces, lors du chapitre de **dynamique**.

1 Description et paramètrage du mouvement d'un point

1.1 Notions de repères et de référentiel

1.1.1 Repère

Considérons que l'on veuille décrire le mouvement d'un objet quelconque. Il nous faut donc repérer sa position, et on utilise pour cette opération un **repère**.

Définition

> Un **repère d'espace** est l'association d'un point et de trois vecteurs non coplanaires, qui permet donc de repérer n'importe quel point de l'espace.

En pratique, on choisit très souvent trois vecteurs qui forment une base orthonormée (les trois vecteurs sont de norme 1, et forment un angle droit deux à deux), ce qui simplifie grandement les calculs.

Par exemple, pour décrire où se situe la brosse du tableau, on peut dire qu'elle se situe à 3 mètres du mur d'entrée, un mètre du sol et 5 cm du mur du tableau.

Grace à un repère, on peut donc déterminer la position d'un objet, ce qui permet de faire de la géométrie, mais comment passer de position à description du mouvement ?

1.1.2 Référentiel

Il faut donner la position de l'objet à chaque instant, il nous faut donc une **horloge** pour pouvoir repérer en plus de la position décrite grâce au repère à quel instant l'objet l'occupait. Est-ce suffisant ?

Non, le mouvement dépend d'où on le regarde : un voyageur dans un train qui part d'une gare a l'impression que c'est le train d'à côté qui recule. De même la chute d'un objet peut avoir l'air d'être une droite ou une parabole.

Il est donc nécessaire de préciser, lors de l'étude du mouvement dans quel **référentiel** l'observateur se situe.

Définition

> Un **référentiel** est l'association d'un repère d'espace, fixe par rapport à l'observateur, et d'une horloge. On le note fréquemment $\mathcal{R}$.

Repère et référentiel sont deux choses bien différentes qu'il ne faut pas confondre : on peut par exemple changer de repère sans changer de référentiel (par exemple passage de coordonnées cartésiennes à coordonnées cylindriques), on peut aussi utiliser des repères qui ne sont pas fixes.

1.2 Repères usuels

1.2.1 Repère cartésien

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ on choisit un point fixe O ainsi que trois axes orthogonaux x, y et z munis chacun d'un vecteur de norme un (on parle de vecteur unitaire) $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z = \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$: on a donc une base orthonormée directe.

Un point M est repéré par ses trois coordonnées (x, y, z) représentant la projection du vecteur $\vec{OM}$ sur chaque axe, on a $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$. En tout point M, les vecteurs de la base sont les mêmes.

Le repère cartésien est celui que vous connaissez déjà, par sa simplicité, il est particulièrement adapté à l'étude de mouvements sans symétrie particulière, ou bien lorsqu'une direction est privilégiée (mouvement le long d'une droite, mouvement dans un champ de pesanteur uniforme, etc).

1.2.2 Repère cylindrique

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ on choisit un point fixe O ainsi que deux directions orthogonales privilégiées repérés par les vecteurs unitaires $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$. Un point M est repéré par ses trois coordonnées (r, θ, z) telles que :

- r est la distance de M à l'axe Oz, réel positif ou nul. Si on appelle M' le projeté de M sur le plan contenant O et orthogonal à $\vec{u}_z$, $r = ||\vec{OM'}||$. $r \in \mathbb{R}^+$;
- θ est l'angle orienté entre $\vec{u}_x$ et OM'. $\theta \in [0, 2\pi[$;
- z la projection de $\vec{OM}$ sur l'axe Oz.

On définit en chaque point M une **base locale** orthonormée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ de la façon suivante :

- $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM'}}{r}$;
- $\vec{u}_z$ vecteur unitaire de la base cartésienne ;
- $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$, vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}_r$, dans le plan orthogonal à $\vec{u}_z$ dirigé dans le sens des θ croissant.

Les coordonnées polaires sont un cas particulier de coordonnées cylindriques où on se restreint au plan $z = 0$.

On a $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$.

Le repère cylindrique est particulièrement adapté pour étudier des mouvements circulaires.

1.3 Description du mouvement

1.3.1 Position d'un point et déplacement élémentaire

Pour décrire le mouvement d'un point, on a besoin de connaitre sa position à chaque instant. On doit donc donner l'ensemble des valeurs de $\vec{OM}(t)$ dans le référentiel d'étude.

En coordonnées cartésiennes, on donne donc les trois fonctions $(x(t), y(t), z(t))$, en coordonnées cylindriques les trois fonctions $(r(t), \theta(t), z(t))$.

On appelle **déplacement élémentaire** la variation du vecteur position entre deux temps infiniment proches t et $t+dt$. Pour effectuer un déplacement élémentaire, on fait changer chaque coordonnée x_i du vecteur position d'une quantité dx_i.

- en coordonnée cartésiennes, si M a pour coordonnées (x, y, z) à l'instant t, à l'instant $t + dt$ ses coordonnées seront $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Le déplacement élémentaire le long de chaque coordonnée x_i est un segment de droite de longueur dx_i, et on peut écrire le déplacement élémentaire comme $d\vec{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$.

- en coordonnées sphériques les coordonnées de M passent de (r, θ, z) à $r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$. Si les déplacements élémentaires sur r et z correspondent toujours à des segments de droite, celui sur l'angle θ correspond à un arc de cercle de rayon r et d'angle $d\theta$. Le déplacement élémentaire est donc $d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$.

1.3.2 Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse dans le référentiel d'étude $\mathcal{R}$ est par définition la dérivée du vecteur position par rapport au temps. On obtient alors :

- en cartésiennes :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z.$$

- en cylindriques :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + \frac{rd\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z.$$

On peut démontrer ces deux formules en utilisant les formules donnant les dérivées des vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

Il faut distinguer la vitesse instantanée (dérivée) de la vitesse moyenne (rapport de la distance par le temps).

1.3.3 Vecteur accélération

Le vecteur accélération est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse. On a donc :

- en cartésiennes :

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z.$$

- en cylindriques :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z.$$

1.4 Exemples de mouvements

1.4.1 Mouvement rectiligne à accélération constante

Considérons l'étude du mouvement des propulseurs d'appoint de la fusée Falcon Heavy lancée le 6 février 2018 par Space X, la société d'Elon Musk qui travaille en collaboration avec la NASA. Ces propulseurs d'appoints étaient les premiers étages des anciens lanceurs Falcon 9 qui avaient été lancés et récupérés déjà une fois, et la nouveauté du lanceur Falcon Heavy est cette possibilité de récupérer au sol les propulseurs d'appoint et le premier étage du lanceur, ce qui permet de substantielles économies.

On sait que les propulseurs d'appoint se sont séparés de la fusée au bout de $t_d = 150$ secondes après le décollage, et que pendant la phase initiale du vol, la fusée a une accélération constante de $a_0 = 14,0$ m.s^{-2}. Déterminer à quelle altitude les propulseurs d'appoint se sont détachés, et quelle était alors la vitesse de la fusée.

- Système étudié : fusée.
- Référentiel : terreste
- Système de coordonnées : cartésien, on prendra l'axe z comme axe vertical dirigé vers le haut, l'origine du repère comme la base de décollage. C'est en effet le plus simple car on a alors $x(t) = y(t) = 0$.
- L'accélération s'écrit alors $\vec{a} = \ddot{z}\vec{u}_z$ donc $\ddot{z} = a_0 = 14,0$ m.s^{-2}. On peut intégrer deux fois cette équation et on a $\dot{z}(t) = a_0 t + v_0 = a_0 t$ car la vitesse initiale de

la fusée est nulle, puis $z(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + h_0 = \frac{1}{2}a_0t^2$ car l'altitude initiale de la fusée est nulle aussi.

On peut donc calculer $z(t_d) = \frac{1}{2}a_0t_d^2 = 158$ km ainsi que la vitesse au décrochage $v(t_d) = \dot{z}(t_d) = a_0t_d = 2,10$ km/s.

En réalité, une grande partie de l'énergie consommée par une fusée est utilisée pour donner de la vitesse horizontale afin de permettre la mise en orbite (aller haut est facile, aller assez vite pour rester en orbite beaucoup moins), et surtout l'accélération n'est pas constante (puisque la fusée est de moins en moins lourde). Les données mesurées sur le vol donnent toutefois une vitesse d'environ 1,9 km/s (mais une vitesse verticale de seulement 800 m/s) et une altitude d'environ 100 km, donc nos estimations nous ont permis de trouver les bons ordres de grandeur.

1.4.2 Mouvement courbe de vecteur-accélération constant

On étudie maintenant le mouvement des propulseurs une fois vides et détachés de la fusée. D'après les données précédentes, leur vitesse verticale est alors $v_v = 800$ m/s, leur vitesse horizontale $v_h = 1,7$ km/s et leur altitude $h_0 = 100$ km. On souhaite alors déterminer le temps de chute ainsi que le point de chute des propulseurs afin de pouvoir les récupérer.

- Système étudié : propulseurs
- Référentiel : terrestre
- Système de coordonnée : deux directions privilégiés (la verticale et le long de la vitesse horizontale initiale) donc cartésiennes. On va prendre l'origine du repère en projetant sur le sol le point où se détachent les propulseurs, l'axe z comme axe vertical ascendant, et l'axe x le long de la vitesse horizontale.
- On a alors $\vec{a}(t) = -g\vec{u}_z$, mais on ne sait pas calculer directement avec les vecteurs. On projette donc sur chacun des axes, et on obtient les trois équations $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ et $\ddot{z} = -g$. On intègre deux fois ces trois relations et on trouve $y(t) = 0$, $x(t) = v_ht$ et $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_v(t) + h_0$. Le temps de vol s'obtient en déterminant le temps au bout duquel $z(t_v) = 0$, on trouve alors

les deux possibilités $t_{1/2} = \frac{v_v \pm \sqrt{v_v^2 + 2gh_0}}{g}$, dont on ne retient que la positive $t_v = \frac{v_v + \sqrt{v_v^2 + 2gh_0}}{g} = 2,0$ min. Les propulseurs tomberont donc $x(t_v) = 4,1.10^5$ m (environ 400 km) plus loin que le point où ils se sont détachés.

En réalité, les propulseurs d'appoint n'étaient pas en chute libre (leur vitesse à l'impact serait alors de $v_v - gt_v \simeq 1,5$ km/s, donc une vitesse supersonique...), mais propulsés par le carburant qu'ils n'avaient pas consommé. C'est aussi pourquoi ils ont pu se poser sur le site de lancement.

1.4.3 Mouvement circulaire uniforme

On continue avec l'exploration spatiale : lors du vol les cosmonautes doivent supporter une accélération qui peut aller (en cas de problèmes) jusqu'à 10 g (c'est-à-dire 10 fois la valeur de l'accélération de la pesanteur terrestre), donc environ 100 m.s^{-2}. Pour s'entrainer à supporter de telles accélérations, les cosmonautes utilisent une centrifugeuse, donc se placent dans une cabine relié à un bras que l'on fait tourner. La centrifugeuse que nous allons étudier est fabriquée de telle sorte que la vitesse maximale de la cabine est de 60 m/s (216 km/h) et que l'accélération est alors de 18 g. Quel doit alors être la longueur du bras de la centrifugeuse ?

- Système étudié : cabine de la centrifugeuse
- Référentiel : terrestre
- Système de coordonnées : mouvement circulaire, donc cylindrique. On prendra l'origine à l'axe de rotation du bras, et l'axe z perpendiculaire au plan horizontal où s'effectue le mouvement.
- On peut alors déterminer la vitesse de la cabine :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta,$$

ainsi que son accélération :

$$\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

En régime permanent, la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est constante, donc $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$. En norme on a donc $v = r\dot{\theta}$ et $a = r\dot{\theta}^2$. En se plaçant aux limites spécifiées par le cahier des charges ($v = 60$ m/s et $a = 18g$), on trouve alors $\dot{\theta} = 3$ rad/s et finalement $r = 20$ m.

Ces chiffres sont comparables à ceux obtenus avec la centrifugeuse de la cité des étoiles proche de Moscou (bras de 18 m et accélération maximale de 30 g).

1.4.4 Mouvement circulaire non-uniforme

Etudions maintenant ce qu'il se passe lors de la mise en route de la centrifugeuse, partant d'une vitesse initiale nulle à une vitesse de 60 m/s avec une accélération angulaire constante $\ddot{\theta} = a = 0,1$ rad.s^{-2} (donc la mise en route durera 30 s).

On a alors $\dot{\theta}(t) = at$ et :

$$\vec{v} = rat\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = ra\vec{u}_\theta - ra^2t^2\vec{u}_r$$

On peut donc décomposer le vecteur accélération selon deux directions, une parallèle à la vitesse a_{par} et l'autre perpendiculaire $\vec{a}_{perp}$.

On remarque alors dans ce cas (mais ce résultat se généralise) que si on appelle v la norme du vecteur vitesse $v = ||\vec{v}||$ alors $\frac{dv}{dt} = a_{par}$.

A l'inverse la composante perpendiculaire au vecteur vitesse ne change pas sa norme (on peut le vérifier dans le cas du mouvement circulaire uniforme) mais sa direction : il "courbe la trajectoire" et dans le cas d'une trajectoire courbe, le vecteur accélération a toujours une composante perpendiculaire dirigée vers l'intérieur de la concavité.

Le vecteur-accélération peut s'écrire comme la somme de deux composantes :

- une composante parallèle au vecteur-vitesse qui est la dérivée de la norme de la vitesse par rapport au temps ;
- une composante orthogonale qui ne change pas la norme du vecteur-vitesse mais sa direction. Elle est toujours dirigée vers la concavité de la trajectoire (dans le cas d'une trajectoire plane).

2 Description du mouvement d'un solide

2.1 Définition d'un solide

Définition

> Un **solide** est dit indéformable si pour tout couple de points du solide (A,B), la distance AB est indépendante du temps.

Il ne faut pas confondre un solide en mécanique et un solide en tant qu'état physique (exemple neige ou glacier). En mécanique, on omet souvent le terme indéformable lorsque l'on étudie le mouvement d'un solide.

2.2 Exemples particuliers de mouvements

2.2.1 Translation

Imaginons le mouvement d'un solide indéformable, par exemple un wagon de train se déplaçant en ligne droite. Alors si l'on prend eux points quelconques du train A et B, le vecteur $\vec{AB}$ reste constant : les trajectoires des points A et B se déduisent l'une de l'autre par une translation.

Ce n'est pas le seul cas, si on imagine le mouvement de la cabine dune grande roue, deux points quelconques de la cabine ont une trajectoire circulaire, et l'on peut passer de l'une à l'autre par translation et le vecteur $\vec{AB}$ reste constant.

> Lorsque tous les points d'un solide ont des trajectoires qui se déduisent les unes des autres par translation, on dit que le solide est en **translation**. On peut distinguer deux cas particuliers :
>
> - les trajectoires sont des segments de droite (tous parallèles entre eux) on parle de **translation rectiligne** ;
> - les trajectoires sont des cercles (de même rayon mais de centres différents), on parle de **translation circulaire**.

Il est bien entendu possible d'avoir des translations qui ne soient ni rectiligne ni circulaire (par exemple parabolique ou curviligne de manière générale).

De plus si le mouvement est effectué avec une vitesse de norme constante on parle de mouvement **uniforme**. On verra par exemple que les mouvements de translation rectiligne uniforme ont un rôle particulier en mécanique.

2.2.2 Rotation autour d'un axe fixe

Considérons à nouveau la centrifugeuse d'entrainement des astronautes, avec un bras de 20 m de long dont la cabine se déplace à 60 m/s. Si l'on s'intéresse au bras, qui est bien un solide indéformable, est-il en translation ? Non, le point d'attache de la cabine a une trajectoire circulaire de rayon 20 m, le point situé à l'autre bout (au niveau de l'axe) a une trajectoire réduite à un point, et un point entre les deux a une trajectoire circulaire de rayon 10 m donc elles ne se déduisent pas les unes des autres par translation.

Par contre, toutes les trajectoires sont des cercles concentriques, il s'agit donc d'un mouvement de **rotation autour d'un axe fixe**.

Déterminons la vitesse de chaque point du bras. Pour ceci, nous allons nous placer dans le référentiel terrestre avec le système de coordonnées cylindriques déjà vu.

Alors pour chaque point du bras, situé à une distance r de l'axe, on a $\vec{v} = r\dot{\theta}u_\theta$.

On pose alors $\Omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire, et $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$ le vecteur rotation et on peut écrire la vitesse du point M de coordonnées (r, θ, z) comme :

$$\vec{v}(M) = r\Omega\vec{u}_\theta = \vec{\Omega} \wedge O\vec{M}.$$