Résolution d'équations différentielles du premier ordre

Table des matières

Les équations différentielles du premier ordre sont un objet mathématique dont la présence apparait régulièrement lors de la mise en équation de phénomènes réels dépendant du temps. Il est donc très important de maitriser la méthode de résolution, et dans cette note de cours, nous allons montrer les points communs entre les différentes approches vues en mathématiques, physique-chimie et SI.

1 Traitement mathématique

La forme générale d'une équation différentielle du premier ordre comme vue en cours de mathématiques est :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t).$$

Dans cette notation, y est une fonction de la variable réelle t, et y' sa dérivée.

L'ensemble des solutions de cette équation différentielle s'écrit sous la forme $y(t) = y_{SH}(t) + y_{SP}(t)$, y_{SH} (respectivement y_{SP}) étant une solution de l'équation homogène (resp. solution particulière).

1.1 Solution de l'équation homogène

On entend par solution de l'équation homogène l'ensemble des fonctions solutions de l'équation homogène (sans second membre) :

$$y'_{SH}(t) + a(t)y_{SH} = 0.$$

On peut montrer mathématiquement que l'ensemble de ces solutions se met sous la forme :

$$y_{SH}(t) = \lambda e^{-A(t)} \quad , \lambda \in \mathbb{R},$$

où l'on a noté $A(t) = \int a(t)dt$ une primitive de la fonction $a(t)$.

On peut vérifier que toutes les fonctions de ce type vérifient l'équation différentielle homogène :

$$y'_{SH}(t) + a(t)y_{SH}(t) = \lambda \left(-a(t)e^{-A(t)}\right) + a(t)\lambda e^{-A(t)} = 0.$$

Note

On peut retrouver ce résultat de manière non rigoureuse en remarquant que l'équation homogène peut aussi s'écrire (tant que $y_{SH}(t) \neq 0$) $\frac{y'_{SH}}{y_{SH}}(t) = -a(t)$ qui en prenant la primitive (et en supposant que y_{SH} est strictement positive) donne $\ln\left(y_{SH}(t)\right) = -A(t) + cte$, donc $y(t) = e^{-A(t)+cte} = \lambda e^{-A(t)}$ en posant $\lambda = e^{cte}$.

Les hypothèses sont nécessaires pour suivre cette démarche de résolution, mais on peut ensuite vérifier que toute fonction de la forme $y_{SH}(t) = \lambda e^{-A(t)}$, même avec $\lambda \leqslant 0$ est bien solution.

1.2 Solution particulière

La solution particulière correspond à n'importe quelle solution de l'équation de départ, avec le second membre.

Une méthode utilisée pour déterminer une de ces solutions est la *méthode de variation de la constante*. Elle consiste à chercher une solution particulière de la même forme que la solution de l'équation homogène, à la différence que la constante devant l'exponentielle est à présent une fonction de la variable t.

On va donc chercher une solution particulière de la forme $y_{SP}(t) = \lambda(t)e^{-A(t)}$, et donc il suffit de trouver une fonction $\lambda(t)$ qui fonctionne.

On calcule alors :

$$\begin{aligned} y'_{SP}(t) &= \lambda'(t)e^{-A(t)} + \lambda(t)\left(-a(t)e^{-A(t)}\right) \\ a(t)y_{SP}(t) &= a(t)\lambda(t)e^{-A(t)} \\ b(t) = y'_{SP}(t) + a(t)y_{SP}(t) &= \lambda'(t)e^{-A(t)} + \lambda(t)\left(-a(t)e^{-A(t)}\right) + a(t)\lambda(t)e^{-A(t)} = \lambda'(t)e^{-A(t)} \end{aligned}$$

On doit donc trouver une fonction $\lambda(t)$ telle que :

$$\lambda'(t)e^{-A(t)} = b(t).$$

Les solutions sont donc telles que $\lambda'(t) = b(t)e^{A(t)}$, donc $\lambda(t) = \int b(t)e^{A(t)}dt$.

1.3 Forme générale des solutions

On peut donc maintenant écrire la forme générale des solutions :

$$y(t) = \lambda e^{-A(t)} + \left(\int b(t)e^{A(t)}dt\right) e^{-A(t)} = \left(\lambda + \int b(t)e^{A(t)}\right) e^{-A(t)}.$$

Si on cherche la solution à un problème expérimental, une seule solution parmi toutes celles-ci sont valables : il faut déterminer la seule valeur de λ qui répond au problème. On doit donc avoir la valeur de la fonction à une valeur de t donnée, c'est ce qu'on appelle les conditions initiales.

1.4 Application à un exemple

Appliquons cette théorie au traitement d'un problème de physique-chimie et de SI, par exemple la charge d'un condensateur dans un circuit RC série sous une tension constante U, alors que le condensateur est déchargé à l'instant $t = 0$.

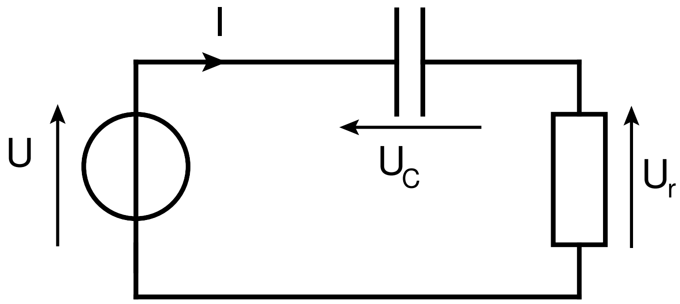

Figure 1 – Circuit RC série dont on effectue l'étude.

En appliquant la loi des mailles et les lois courant-tension pour la résistance et le condensateur on trouve le système :

$$U = U_r(t) + U_c(t) = Ri(t) + U_c(t) = RC\frac{dU_c}{dt}(t) + U_c(t).$$

La fonction $U_c(t)$ est donc solution de l'équation différentielle :

$$U_c'(t) + \frac{1}{RC}U_c(t) = \frac{U}{RC}.$$

Elle se met donc bien sous la forme $U_c'(t) + a(t)U_c(t) = b(t)$ si l'on pose $a(t) = \frac{1}{RC}$ et $b(t) = \frac{U}{RC}$ (ce sont dans ce cas particuliers deux fonctions constantes).

On doit donc calculer une primitive $A(t)$ de $a(t)$, on trouve $A(t) = \frac{t}{RC}$. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $U_{c,SH}(t) = \lambda e^{-t/RC}$.

On calcule alors la solution particulière avec la méthode de variation de la constante, ce qui revient à chercher une primitive de $\frac{U}{RC}e^{+t/RC}$. On trouve alors comme primitive $Ue^{t/RC}$, et comme solution particulière $U_{c,SP}(t) = Ue^{t/RC}e^{-t/RC} = U$.

Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :

$$U_c(t) = U_{c,SH}(t) + U_{c,SP}(t) = \lambda e^{-t/RC} + U.$$

Pour finir le problème, il faut déterminer la bonne valeur de λ telle que $U_c(t)$ vérifie la condition initiale du condensateur totalement déchargé $U_c(t = 0) = 0$.

On doit donc avoir :

$$U_c(t = 0) = \lambda e^{-0/RC} + U = \lambda + U = 0.$$

On trouve donc la seule valeur de λ admissible : $\lambda = -U$.

Finalement, la solution du problème est donc :

$$U_c(t) = -Ue^{-t/RC} + U = U\left(1 - e^{-t/RC}\right).$$

2 Physique-chimie

En physique-chimie, on va exprimer l'équation différentielle $RC\frac{dU_c}{dt}(t) + U_c(t) = U$ sous la forme canonique :

$$\frac{dU_c}{dt}(t) + \frac{U_c(t)}{\tau} = \frac{U_p}{\tau}.$$

Ceci est possible si l'on pose $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$, donc $\tau = RC$ et $\frac{U_p}{\tau} = \frac{U}{RC}$, donc $U_p = U$.

Les solutions de l'équation homogène sont les solutions de l'équation $\frac{dU_{c,SH}}{dt}(t) + \frac{U_{c,SH}(t)}{\tau} = 0$.

Les solutions sont donc de la forme $U_{c,SH}(t) = \lambda e^{-t/\tau}$.

On va chercher ensuite une solution particulière de la même forme que la tension délivrée par le générateur, donc ici une fonction continue, $U_{c,SP}(t) = \alpha$.

Puisque $U_{c,SP}(t)$ est solution de l'équation différentielle, on doit avoir $\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\alpha}{\tau} = \frac{U_p}{\tau}$, or α étant constante $\frac{d\alpha}{dt} = 0$.

On doit donc avoir $\frac{\alpha}{\tau} = \frac{U_p}{\tau}$ donc $\alpha = U_p$ et finalement $U_{c,SP}(t) = U_p$ est bien une solution particulière de l'équation différentielle.

On regroupe les deux résultats et on trouve que la tension aux bornes du condensateur lors de la charge se met sous la forme :

$$U_c(t) = U_{c,SH}(t) + U_{c,SP}(t) = \lambda e^{-t/\tau} + U_p.$$

Il faut donc maintenant trouver parmi toutes ces solutions ($\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda e^{-t/\tau} + U_p$ est une solution de l'équation différentielle) la seule qui correspond au problème physique que l'on étudie. On doit donc déterminer la bonne valeur de λ, et on utilise alors les conditions initiales.

Puisque le condensateur était initialement déchargé, $U_c(t < 0) = 0$, donc par continuité $U_c(t = 0^+) = 0$.

On doit donc trouver la valeur de λ telle que $U_c(t = 0^+) = \lambda e^{-0^+/\tau} + U_p = 0$, ce qui donne $\lambda = -U_p$.

On trouve finalement la solution du problème :

$$U_c(t) = -U_p e^{-t/\tau} + U_p = U_p\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

que l'on peut réécrire directement en fonction des données du problème en utilisant les relations $\tau = RC$ et $U_p = U$. On obtient alors :

$$U_c(t) = U\left(1 - e^{-t/RC}\right).$$

3 Sciences de l'ingénieur

En sciences de l'ingénieur, on va exprimer l'équation différentielle $RC\frac{dU_c}{dt}(t) + U_c(t) = U$ sous la forme canonique :

$$U_c(t) + \tau\frac{dU_c}{dt}(t) = U_p.$$

Ceci est possible uniquement si l'on pose $\tau = RC$ et $U_p = U$.

Les solutions de l'équation homogène sont les solutions de l'équation $U_{c,SH}(t) + \tau\frac{dU_{c,SH}}{dt}(t) = 0$.

Les solutions sont donc de la forme $U_{c,SH}(t) = \lambda e^{-t/\tau}$.

On va chercher ensuite une solution particulière de la même forme que la tension délivrée par le générateur, donc ici une fonction continue, $U_{c,SP}(t) = \alpha$.

Puisque $U_{c,SP}(t)$ est solution de l'équation différentielle, on doit avoir $\alpha + \tau\frac{d\alpha}{dt} = U_p$, or α étant constante $\frac{d\alpha}{dt} = 0$.

On doit donc avoir $\alpha = U_p$ et finalement $U_{c,SP}(t) = U_p$ est bien une solution particulière de l'équation différentielle.

On regroupe les deux résultats et on trouve que la tension aux bornes du condensateur lors de la charge se met sous la forme :

$$U_c(t) = U_{c,SH}(t) + U_{c,SP}(t) = \lambda e^{-t/\tau} + U_p.$$

Il faut donc maintenant trouver parmi toutes ces solutions ($\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda e^{-t/\tau} + U_p$ est une solution de l'équation différentielle) la seule qui correspond au problème physique que l'on étudie. On doit donc déterminer la bonne valeur de λ, et on utilise alors les conditions initiales.

Puisque le condensateur était initialement déchargé, $U_c(t = 0) = 0$.

On doit donc trouver la valeur de λ telle que $U_c(t = 0) = \lambda e^{-0/\tau} + U_p = 0$, ce qui donne $\lambda = -U_p$.

On trouve finalement la solution du problème :

$$U_c(t) = -U_p e^{-t/\tau} + U_p = U_p\left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

que l'on peut réécrire directement en fonction des données du problème en utilisant les relations $\tau = RC$ et $U_p = U$. On obtient alors :

$$U_c(t) = U\left(1 - e^{-t/RC}\right).$$

4 Tableau comparatif

Approche	Mathématiques (cas général)	Mathématiques (coef. constants)	Physique-chimie	SI
Equation différentielle	$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$	$y'(t) + ay(t) = b$	$\frac{dy}{dt}(t) + \frac{y(t)}{\tau} = \frac{y_p}{\tau}$	$y(t) + \tau\frac{dy}{dt}(t) = y_p$
Correspondances		$a = \frac{1}{\tau}$	$\tau = \frac{1}{a}$	$y_p = \frac{b}{a} = b\tau$
Solution homogène	$\lambda e^{-A(t)}$	λe^{-at}	$\lambda e^{-t/\tau}$	$\lambda e^{-t/\tau}$
Solution particulière	$\left(\int b(t)e^{A(t)}dt\right)e^{-A(t)}$	$\frac{b}{a}$	y_p	y_p

5 Tracé de la solution et interprétation de la courbe

On obtient dans tous les cas la même solution (et heureusement !). Cette solution est la somme de deux termes, un constant (U) qui est la solution particulière et qui correspond au **régime permanent** et un second terme qui varie en fonction du temps ($-Ue^{-\frac{t}{\tau}}$) et qui fait la transition entre les valeurs des deux régimes permanents ($t < 0$ et $t \to \infty$), le **régime transitoire**.

On peut dans ce cas aussi regarder les valeurs particulières que prend la tension aux temps τ, 3τ et 5τ :

$$\begin{aligned} U_c(\tau) = U\left(1 - e^{-1}\right) &= 0,63\ U \\ U_c(3\tau) = U\left(1 - e^{-3}\right) &= 0,95\ U \\ U_c(5\tau) = U\left(1 - e^{-5}\right) &= 0,99\ U \end{aligned}$$

Enfin, on peut aussi tracer la tangente à l'origine, d'équation $y = U_c(t = 0) + t\frac{dU_c}{dt}(t = 0) = U\frac{t}{\tau}$, qui coupe la droite horizontale correspondant au régime permanent $U_c = U$ au bout du temps $t = \tau$.

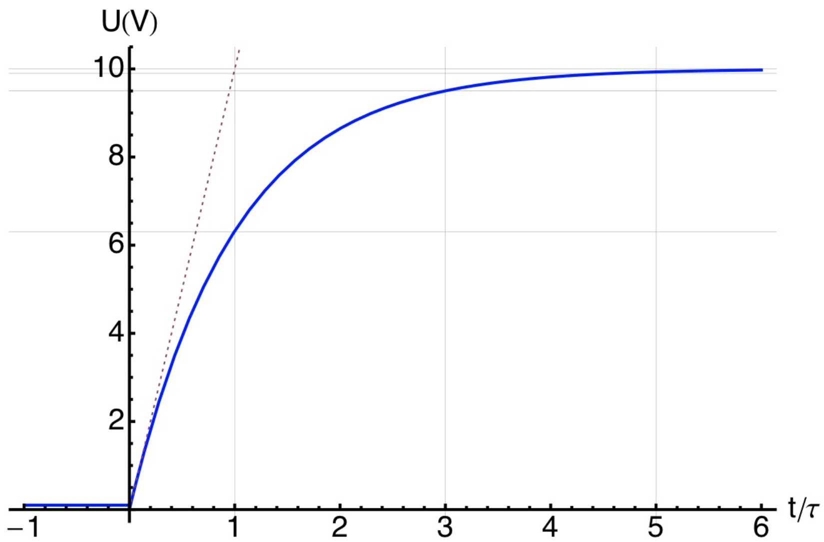

Figure 2 – Tension $U_c(t)$ en bleu lors de la charge d'un condensateur, la tension appliquée par le générateur est de 10 V, la résistance de 4 Ω et la capacité du condensateur de 0, 25 F, donc $\tau = 1$ s. En pointillés, la tangente à l'origine, et des lignes parallèles aux axes sont tracés pour $t = \tau$, $t = 3\tau$ et $t = 5\tau$, ainsi qu'à $U = 6,3$ V, $U = 9,5$ V, $U = 9,9$ V et $U = 10$ V.

En théorie, le régime transitoire ne se termine jamais puisque $e^{-\frac{t}{\tau}} > 0$. Toutefois en pratique, on considère qu'il est terminé au bout de 3 ou 5 fois le temps caractéristique.

6 Approche numérique

En sciences, il y a quantité d'équations différentielles qui régissent les phénomènes étudiés qui ne sont pas des équations différentielles linéaires, et dont on ne connait pas la solution exacte.

On peut toutefois approcher ces solutions par des méthodes numériques, dont le principe de fonctionnement est toujours le même : on part d'une situation connue, celles des conditions initiales, donc ici, on va dire que $U_c(t=0)=0$.

On calcule ensuite la valeur de U_c après un temps ϵ très petit, en disant que $\frac{U_c(\epsilon)-U_c(0)}{\epsilon} \simeq \frac{dU_c}{dt}(t=0)$, et en utilisant le fait que $\frac{dU_c}{dt}(t) = \frac{U-U_c(t)}{RC}$ (égalité donnée par l'équation différentielle).

On applique donc à chaque étape la méthode suivante :

1. on connait la valeur de $U_c(t)$;
2. on calcule la valeur de $\frac{dU_c}{dt}(t) = \frac{U-U_c(t)}{RC}$;
3. on calcule la valeur de $U_c(t+\epsilon) = U_c(t) + \epsilon\frac{dU_c}{dt}(t)$;
4. on repart de la première étape avec la nouvelle valeur $U_c(t+\epsilon)$.

On peut donc écrire le script python suivant, en prenant les valeurs $U = 10$ V, $R = 4\ \Omega$ et $C = 0,25$ F.

On sait alors que $\tau = 1$ s , et donc il va falloir choisir un pas de quantification ϵ assez petit pour minimiser la différence entre $\frac{dU_c}{dt}(t)$ et $\frac{U_c(t+\epsilon)-U_c(t)}{\epsilon}$ et ne pas voir une courbe affine par morceaux, mais suffisamment grand pour ne pas surcharger la mémoire de l'ordinateur et diminuer les temps de calculs. Dans le script, je choisis de prendre 100 points pour étudier le régime transitoire, donc un pas de quantification de $\epsilon = \frac{5\tau}{100} = 50$ ms.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as pypl
tableaut = np.arange(0,5,0.05) #définition du tableau de variation du temps
tableauU = np.arange(0,5,0.05) #définition de celui des valeurs prises par Uc
tableauV = np.arange(0,5,0.05) #définition de celui des valeurs de la dérivée de Uc
for i in range(99):
    tableauV[i] = 10. - tableauU[i] #calcul de la dérivée grace à l'équation différentielle
    tableauU[i+1] = tableauU[i] + 0.05 * tableauV[i] #calcul approché de la prochaine valeur de Uc
pypl.plot(tableaut,tableauU)
pypl.title('Simulation numérique de la charge du condensateur')
pypl.xlabel('t(s)')
pypl.ylabel('Uc(V)')
pypl.grid(True)
pypl.savefig('charge_sim_num.pdf')
pypl.show()
```

On obtient alors la courbe de charge suivante, comparable à la résolution exacte précédente.

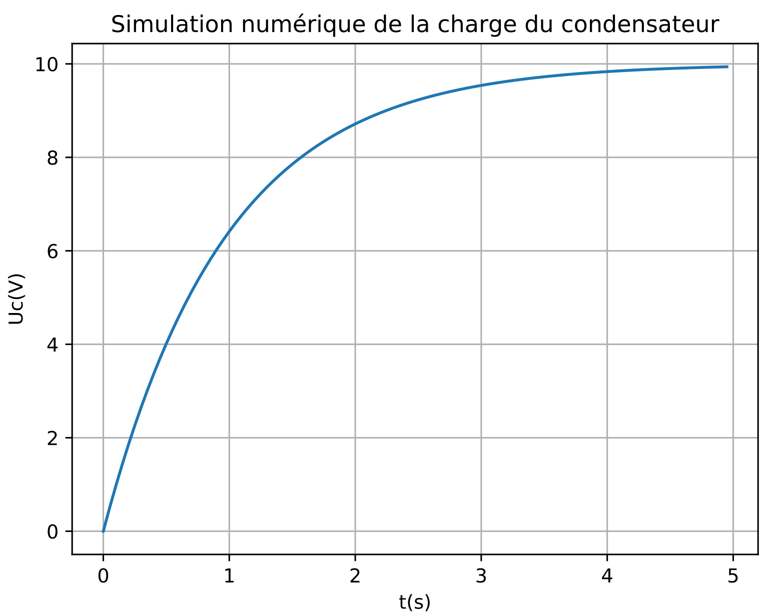

Figure 3 – Simulation numérique appliquée à la charge d'un condensateur de capacité 0,25 F en série avec une résistance de 4 Ω sous une tension de 10 V avec un pas de 50 ms.