Chapitre 0
Présenter un résultat en physique-chimie

Table des matières

1 Grandeurs physiques et unités

La physique-chimie, comme toutes les sciences expérimentales, nécessite des va et vient incessants entre modèles théoriques et observations expérimentales. En effet, seule la comparaison des observations expérimentales avec les prévisions d'un modèle théorique permet de valider ou non le modèle en question. La seule chose que l'on sait comparer sont des nombres (qu'est ce qui est le plus "bleu" entre le "rouge" et le "jaune" ?), il est donc nécessaire de traduire les grandeurs physiques en chiffres pour les comparer, c'est le but de la mesure.

1.1 Représentation d'une grandeur physique

On représente une grandeur physique pour pouvoir l'évoquer. On utilise pour ce faire soit une lettre (par exemple c pour la vitesse de la lumière dans le vide dans la célèbre formule $E = mc^2$) ou par un nombre, obtenu par une mesure ou par un calcul. Dans les deux cas, on peut utiliser cette représentation dans des calculs (on parle respectivement de calculs *littéraux* et *numériques*). Il y a toutefois des règles à respecter que nous allons aborder ensemble.

1.1.1 Mesure d'une grandeur physique

Puisqu'on on travaille au lycée Eiffel, considérons le cas de la tour Eiffel, et en particulier la grandeur physique qui est sa hauteur. On peut la noter h : représentation littérale. Si on veut la représenter de manière numérique on peut représenter cette hauteur par le nombre 324 m dans le système métrique, ou bien encore 1063 pieds dans le système impérial. Vu qu'il s'agit à chaque fois de la même grandeur physique, toutes ces représentations sont égales on a donc :

$$h \;=\; 324\ m \;=\; 1063\ ft$$

Il est important de bien visualiser l'importance de préciser l'unité, sinon on écrit $324 = 1063$, et tous les profs de maths se retournent dans leur tombe.

La représentation numérique d'une grandeur n'a aucun sens si l'unité n'est pas précisée. Un résultat numérique présenté sans unité ne sera *jamais* pris en compte.

1.2 Manipulation de formules

1.2.1 Calculs

On peut faire des calculs tant avec les représentations numériques que littérales, mais il y a des règles à respecter.

- additions et soustractions : possible *uniquement* si les grandeurs ont la même unité (exemples)
- multiplications et divisions : toujours possible *mais* il faut multiplier ou diviser les unités aussi (exemples)
- fonctions mathématiques : ne marchent *uniquement* que sur des nombres sans unités (exemples)

Exercices d'application.

1.2.2 Homogénéité

Les deux membres d'une égalité doivent avoir la même unité. Ceci présente deux intérêts majeurs :

1. Vérifier que la formule utilisée n'est pas absurdement fausse. Par exemple $v \neq d \times t$. Il y a des erreurs types qui permettent de se rendre compte qu'il y a des étourderies dans un calcul :
$$l + 1/l' \qquad \exp(t) \qquad \frac{R_1 R_2}{1 + R_3}$$
2. Essayer de trouver l'influence de chaque paramètre sur un phénomène. Par exemple, période du pendule simple. Dépend de la masse du pendule (en kg), de sa longueur (en m) et de l'accélération de la pesanteur (en $m.s^{-2}$). On trouve une formule de la forme $T = \sqrt{l/g}$

1.3 Unités du système international

Unités de mesure de longueur : mètre, pouce, pied, coudée, yard, année-lumière,...
Question : j'arrive à monter au sommet de la tour Eiffel de 1063 pieds alors que je mesure 1,75 m. A quelle altitude est le sommet de ma tête ? Nécessité d'utiliser les mêmes unités → système international.

1.3.1 Unités de base

Pas nécessaire d'avoir une unité bien définie pour toutes les grandeurs, par exemple, avec une unité de longueur et une de temps, on a aussi : une unité de surface, une unité de volume, une unité de vitesse, une unité d'accélération, etc.

Le bureau international des poids et mesures (BIPM, qui siège en France et créé par la conférence du mètre en 1875) est l'institut chargé de définir les unités de base du système international (SI). A l'heure actuelle, il y a sept unités de base :

- longueur : mètre, m
- temps : seconde, s
- masse : kilogramme, kg (attention au kilo)
- courant électrique : ampère, A
- température thermodynamique : kelvin, K
- quantité de matière : mole, mol
- intensité lumineuse : candela, cd

1.3.2 Unités dérivées

On peut ainsi exprimer l'unité SI de toutes les grandeurs physiques, en utilisant ces 7 unités de base. Par exemple, l'unité SI d'une force est $kg.m.s^{-2}$ (on peut retrouver ce résultat avec la formule donnant le poids $P = mxg$ avec m la masse et g l'accélération de la pesanteur). De même, l'unité SI de la pression est $kg.m^{-1}.s^{-2}$ (on rappelle qu'une force F sur une surface S exerce une pression $P = F/S$).

On voit bien qu'exprimer les unités de toutes les grandeurs en fonction des unités de base du SI peut vite devenir fastidieux, on utilise donc des unités *dérivées* du SI.

On définit par exemple ainsi le newton N unité SI de force comme $1\ N = 1\ kg.m.s^{-2}$, et le pascal Pa unité SI de pression comme $1\ Pa = 1\ N.m^{-2} = 1\ kg.m^{-1}.s^{-2}$.

On trouve dans le tableau de la figure 2 certaines de ces unités dérivées.

unités SI dérivées

grandeur	*unité SI*	*symbole*	*expression symbolique*
fréquence	**hertz**	Hz	s^{-1}
force	**newton**	N	$m.kg.s^{-2}$
pression, contrainte	**pascal**	Pa	$m^{-1}.kg.s^{-2}$
énergie, travail, quantité de chaleur	**joule**	J	$m^2.kg.s^{-2}$
puissance, flux énergétique	**watt**	W	$m^2.kg.s^{-3}$
quantité d'électricité, charge électrique	**coulomb**	C	s.A
potentiel électrique, tension électrique, force électromotrice	**volt**	V	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-1}$
capacité électrique	**farad**	F	$m^{-2}.kg^{-1}.s^4.A^2$
résistance électrique	**ohm**	Ω	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$
conductance	**siemens**	S	$m^{-2}.kg^{-1}.s^3.A^2$
flux d'induction magnétique	**weber**	Wb	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-1}$
induction magnétique	**tesla**	T	$kg.s^{-2}.A^{-1}$
inductance	**henry**	H	$m^2.kg.s^{-2}.A^{-2}$
flux lumineux	**lumen**	lm	cd.sr
éclairement lumineux	**lux**	lx	$m^{-2}.cd.sr$
activité	**becquerel**	Bq	s^{-1}
dose absorbée	**gray**	Gy	$J.kg^{-1}$

Figure 1 – Tableau récapitulatif de différentes unités dérivées du SI.

Remarque

Le newton apparait explicitement dans la définition de l'ampère, ce qui n'est pas gênant puisque l'ampère n'apparait pas dans les définitions de la seconde, du mètre et du kilogramme.

1.3.3 Multiples et sous-multiples

Il est aussi possible de multiplier ou diviser les unités par des puissances de dix en utilisant un préfixe. On peut ainsi diviser une unités en sous-multiples :

Puissance de dix	10^{-15}	10^{-12}	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
Préfixe	femto-	pico-	nano-	micro-	milli-	centi-	déci-
Exemple	fm	pm	nm	µm	mm	cm	dm

ou bien encore multiplier une unité avec les préfixes :

Puissance de dix	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	10^{15}
Préfixe	deca-	hecto-	kilo-	mega-	giga-	tera-	peta-
Exemple	dam	hm	km	Mm	Gm	Tm	Pm

2 Mesures, erreurs et incertitudes

Définitions

Pour attribuer une représentation numérique à une grandeur physique il est nécessaire de procéder à une opération nommé *mesurage*. La grandeur mesurée s'appelle le *mesurande*, et l'instrument de mesure fournit une *valeur mesurée*.

2.1 Erreurs de mesure

Il est impossible d'avoir une valeur mesurée rigoureusement exacte : il y a toujours une erreur de mesure que l'on espère minime. On note x_v *valeur vraie* la valeur, généralement inconnue, de la grandeur que l'on cherche à mesurer, et x la valeur mesurée. L'erreur de mesure est la différence entre ces deux valeurs, et est donc aussi inconnue. Il existe deux sources différentes d'erreurs de mesure, les erreurs systématiques et les erreurs aléatoires.

Par exemple si on prend un tireur à la carabine, et que l'on regarde les impacts de 10 de ses tirs, on va remarquer qu'il ne sont pas tous au même endroit, il s'agit d'erreur aléatoire. Mais si en plus la carabine est mal réglée, on va aussi remarquer que par exemple, tous les tirs sont au dessus du centre la cible, il s'agit d'une erreur systématique.

Enfin si on imagine deux tireurs avec une même carabine bien réglée, un champion olympique et l'un d'entre vous, on va remarquer que le champion va avoir ses tirs bien plus regroupés que le débutant : l'erreur dans son cas est bien plus petite.

2.1.1 Erreurs systématiques

Les erreurs systématiques sont dures à repérer : on ne connait pas la valeur vraie, donc on ne connait pas l'erreur. De plus, contrairement aux erreurs aléatoires, elles ne changent pas si on refait un mesurage.

Il y a deux types d'erreurs systématiques, celles dues aux instruments de mesure et celles dues au choix du modèle théorique. Par exemple, si on veut mesurer la longueur d'un trait sur une feuille de papier, on va prendre un double-décimètre. Le problème c'est que ce double-décimètre ne peut pas donner la valeur vraie pour différentes raisons :

- le fabricant ne peut garantir qu'il fait exactement 20 cm.
- il a pu tomber, s'abimer, etc
- il peut se dilater ou se contracter en fonction de la température

Dans le dernier cas, on parle de *grandeur d'influence* : il s'agit d'un paramètre (ici la température) qui a une influence sur l'instrument de mesure sans en avoir sur la grandeur mesurée. Il s'agit la plupart du temps de la température ou de la fréquence d'échantillonnage des appareils de mesure numériques. Il est donc nécessaire de connaitre le principe de fonctionnement des appareils de mesure utilisés pour pouvoir prendre en compte ces grandeurs d'influence.

Un exemple d'erreur systématique dû au modèle théorique correspond à la mesure d'une résistance avec un voltmètre et un ampèremètre, dans laquelle on néglige très souvent les résistances des deux appareils.

2.1.2 Erreurs aléatoires

On peut les détecter en effectuant plusieurs fois la mesure, mais on ne peut jamais les corriger exactement. Si on reprend l'exemple des deux tireurs à la carabine, dans un des deux cas, les erreurs sont plus grandes (pour le débutant, les tirs sont moins regroupé), mais même pour le champion, toutes les balles ne sont pas exactement au centre de la cible.

A cause de ces deux types d'erreurs, on n'est jamais certain du résultat d'un mesurage.

2.2 Incertitudes

La seule chose exacte que l'on peut faire après un mesurage, c'est dire que l'on estime que la valeur vraie doit être comprise entre deux valeurs, avec une probabilité donnée. On donne donc la meilleure estimation possible de la valeur mesurée x et l'incertitude associée $u(x)$. Il y a deux manières de procéder pour évaluer l'incertitude, que l'on verra en détail lors de futurs TP.

2.2.1 Incertitudes de type A

Si on a la possibilité de faire plusieurs mesures, on prend la moyenne des mesures comme valeur mesurée $x =< x >$, et comme incertitude-type l'écart-type divisé par $\sqrt{N}$: $u(x) = \sqrt{\sum_i (x-x_i)^2 / N} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{1}{N}\sum_i (x-x_i)^2} = \frac{<(x_i - <x>)^2>}{\sqrt{N}}$. Plutôt que d'utiliser cette formule, il est plus rapide d'utiliser un outil de traitement statistique (calculette, pyhton, regressi, *etc*).

Exemple : on procède à 5 mesures indépendantes de la hauteur de la tour Eiffel et on trouve $h_1 = 325$ m, $h_2 = 320$ m, $h_3 = 335$ m, $h_4 = 315$ m et $h_5 = 330$ m.

On calcule dans un premier temps la moyenne, qui sera notre meilleure estimation de la taille réelle de la tour Eiffel, et on trouve $< h >= 325$ m.

On peut alors calculer pour chaque mesure son écart avec la moyenne puis prendre le carré. On trouve le tableau suivant :

Mesure	1	2	3	4	5
Hauteur (m)	325	320	335	315	330
$h_i - < h >$ (m)	0	-5	10	-10	5
$(h_i - < h >)^2$ (m^2)	0	25	100	100	25

On peut alors déterminer l'incertitude-type : $u(h) = \frac{\sqrt{(0+25+100+100+25)\ \mathrm{m}^2}}{5} \simeq 3,16$ m, que l'on arrondit à l'excès à 4 m.

2.2.2 Incertitudes de type B

Si on ne peut pas faire de traitement statistique, on prend la valeur mesurée comme estimation de la valeur vraie, et pour l'incertitude :

- pour un instrument gradué de graduation Δ, on prend $u(x) = \Delta/\sqrt{12}$. Par exemple pour un double-décimètre gradué en mm, l'incertitude-type sur une mesure de longueur L est $u(L) = \frac{1\ \mathrm{mm}}{\sqrt{12}} \simeq 0,29$ mm que l'on arrondit à 0,3 mm.
- pour un appareil de mesure, se référer à la notice.

2.2.3 Autres incertitudes

On définit aussi des incertitudes élargies, en prenant $U(x) = ku(x)$ avec $k > 1$ pour augmenter la probabilité d'avoir la valeur vraie dans l'intervalle considéré.

On utilise aussi des incertitudes relatives $u(x)/x$. L'incertitude sur un résultat s'exprime dans la même unité que la grandeur mesurée. L'incertitude relative est sans unité, elle s'exprime en pourcentage.

3 Présentation d'un résultat

Le résultat d'une mesure doit être présenté sous la forme $x = ...$ $u(x) =$. Par exemple, si je me mesure avec une toise graduée en cm, et que je lis être entre les graduations 174 et 175 ma taille est :

$$h = 1,745 \text{ m} \qquad u(h) = 0,005 \text{ m}$$

3.1 Chiffres significatifs

Dans ce résultat, on ne présente que les chiffres dont on est "surs". Ici, il y en a 4, puisqu'à cause de l'incertitude, il serait idiot d'écrire pour ma taille $h = 1,743938$ m $u(h) = 0,005$ m.

Définitions

Les chiffres significatifs sont tous les chiffres qui apparaissent, à l'exception des zéros situés à la gauche du nombre.

Exemples.
L'avantage de la notation scientifique est qu'elle permet de bien compter les CS.

3.2 Règles d'utilisation

3.2.1 Chiffres significatifs

- Addition ou soustraction : on conserve la précision la plus large. Ex : 324 m + 1,75 m = 326 m.
- Autres opérations : le résultat doit avoir autant de CS que le nombre utilisé qui en a le moins. Ex : 3,56 x 2 = 7
- Dans les exercices, souvent le même nombre de CS pour tous les nombres. Il faut le repérer et l'utiliser.
- La plupart du temps, l'incertitude ne s'exprime qu'avec un seul CS.
- Il faut accorder le nombre de CS du résultat à celui de l'incertitude. Ex : $h = 1,743938$ m $u(h) = 0,01$ m devient $h = 1,74$ m $u(h) = 0,01m$.

3.2.2 z-score

Pour une grandeur mesurée expérimentalement, on dispose donc d'une meilleure estimation de la valeur vraie a et de l'incertitude-type associée $u(a)$. En l'absence d'erreur systématique, et si les erreurs sont vraiment aléatoires, alors la probabilité que la valeur vraie soit entre $a - u(a)$ et $a + u(a)$ est d'environ 63 % et elle passe à 95 % pour l'intervalle entre $a - 2u(a)$ et $a + 2u(a)$ (puis 99 % pour $3u(a)$ etc).

Si on dispose d'une valeur de référence de cette grandeur on peut alors vouloir vérifier que le résultat de mesure est compatible avec cette valeur tabulée a_{ref}. On calcule alors le z-score : $z = \frac{|a - a_{ref}|}{u(a)}$. On peut alors distinguer 2 cas :

- si z est grand (plus grand que 3 par exemple), alors l'écart entre la valeur mesurée et la valeur de référence est plus grand que 3 incertitudes-types, donc il est peu probable que des erreurs aléatoires expliquent cet écart (la probabilité que ce soit le cas est plus petite que 1%), donc il y a surement un problème (modèle théorique pas vérifié, protocole expérimental pas adapté,...) : la valeur mesurée n'est pas copatible avec la valeur de référence ;
- si z est petit (inférieur à 1, voire 2 à la rigueur), alors on ne peut pas conclure qu'il y a désaccord entre la théorie et l'expérience.

On peut aussi vérifier la compatibilité de deux mesures différentes de la même grandeur de la même manière. Par exemple pour un protocole donnant a_1 avec son incertitude-type $u(a_1)$ et un deuxième protocole donnant a_2 avec une incertitude-type $u(a_2)$, alors le z-score se calcule comme $z = \frac{|a_1 - a_2|}{\sqrt{u(a_1)^2 + u(a_2)^2}}$ et les 2 expériences sont compatibles entre elles si ce z-score est petit.

Par exemple, le sujet de Centrale-Supelec 2022 en PC comparait une vitesse obtenue dans une descente en vélo avec un casque classique v_c et avec un casque profilé v_p. Les valeurs obtenues expérimentalement étaient $v_c = 18,5$ m/s avec une incertitude-type associée $u(v_c) = 0,1$ m/s et pour le casque profilé $v_p = 19,25$ m/s et $u(v_p) = 0,13$ m/s.

Le calcul du z-score donne $z = \frac{v_p - v_c}{\sqrt{u(v_c)^2 + u(v_p)^2}} \simeq 4,6$, il est donc très peu probable que la vitesse avec le casque classique soit plus grande qu'avec le casque profilé, il vaut donc mieux utiliser le casque profilé.

Une manière plus visuelle d'interpréter le z-score consiste à simuler un grand nombre de valeurs aléatoires pour chaque grandeur qui suivent une loi gaussienne où la valeur moyenne est la meilleure estimation de la grandeur obtenue par l'expérience et l'écart-type son incertitude-type. On peut alors ainsi un histogramme, et en faisant ce travail pour 2 valeurs, on peut distinguer les cas où les valeurs sont compatibles quand les histogrammes se superposent en grande partie (ce qui correspond à un z-score petit) aux cas où les valeurs sont différentes quand les histogrammes sont disjoints (z-score élevé).

Dans le cas du sujet de Centrale, les histogrammes obtenus pour 10 000 valeurs simulées de chaque vitesse sont disjoints, il y a donc une réelle augmentation de la vitesse dûe au casque (la probabilité que la vitesse avec casque classique soit plus grande qu'avec le casque profilé est très petite).

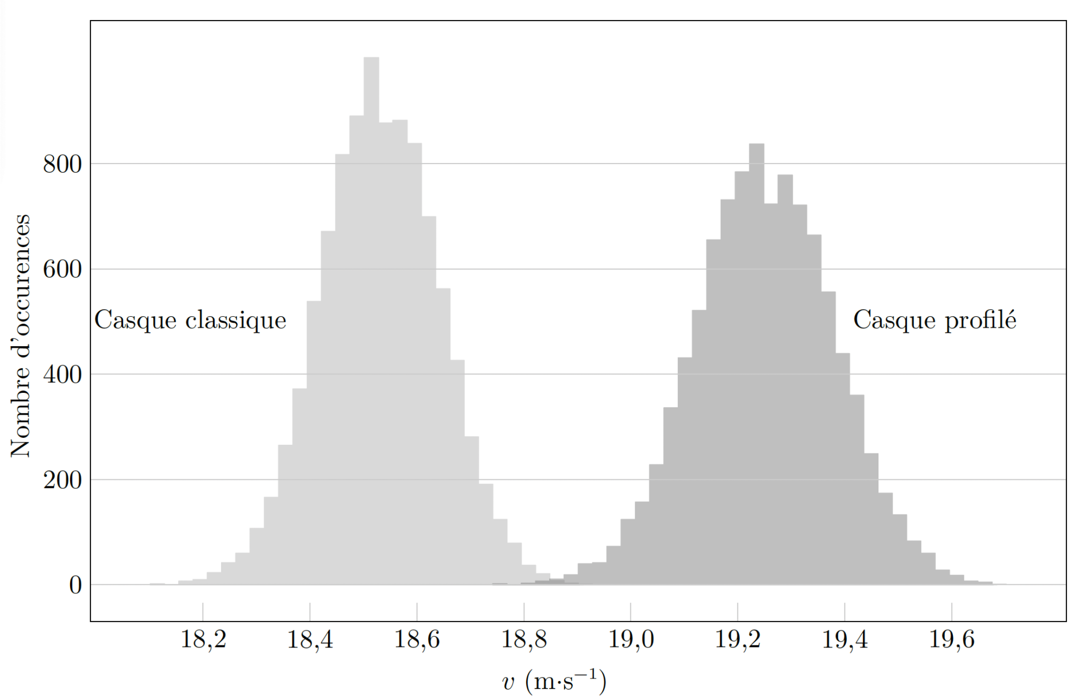

Figure 2 – Histogrammes des valeurs simulées des vitesses. (Source : Concours Centrale-Supelec Physique 1 PC 2023)

3.2.3 Propagation des incertitudes

Lors d'un calcul effectué à partir de grandeurs mesurées expérimentalement, on doit aussi faire un calcul pour obtenir l'incertitude associé : on parle d'incertitudes composées ou de propagation des incertitudes. Il y a deux règles à retenir :

- Addition ou soustraction : g = a + b + c + ... On procède à une somme quadratique des incertitudes : $u(g) = \sqrt{u(a)^2 + u(b)^2 + u(c)^2 + \dots}$
- Produit ou quotient : g = a x b /c . Ce sont les incertitudes relatives qui se somment de manière quadratique (unités !) : $\frac{u(g)}{g} = \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2 + \left(\frac{u(c)}{c}\right)^2}$

Dans le cas de calculs plus compliqués, il est procédé à une *simulation Monte-Carlo* : prenons l'exemple d'une grandeur h qui dépend de manière quelconque de deux grandeurs a et b en suivant une loi $h = f(a, b)$. Les grandeurs a et b ont été mesurées et sont connues avec leurs incertitudes-types $u(a)$ et $u(b)$. La première étape est de tirer un grand nombre N de valeurs a_i et b_i qui suivent une loi gaussienne de moyenne a et b et d'écart-type $u(a)$ et $u(b)$. On calcule alors les N valeurs de h correspondantes $h_i = f(a_i, b_i)$, et on procède alors comme dans le cas d'incertitude de type A : on prend la moyenne des h_i comme meilleure estimation de la valeur de h, et l'incertitude-type sur h est déterminée par l'écart-type. Toutefois on ne divise pas par $\sqrt{N}$, les N simulations n'étant pas une représentation d'erreurs aléatoires qui se compensent, mais une représentation des différentes valeurs possibles respectant les incertitudes sur les grandeurs de départ.